# 41. Трехмерная фигура рассеяния, формируемая оптической системой при осевом расположении точечного объекта

*С. Н. Корешев, Д. С. Смородинов, О. В. Никаноров, М. А. Фролова*
Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, Санкт-Петербург, Россия

Приведены результаты расчета распределения комплексной амплитуды и интенсивности в трёхмерной фигуре рассеяния, формируемой оптической системой при осевом расположении точечного объекта. Работа выполнена в интересах разработки оптических систем с увеличенной глубиной резкости применительно к синтезированной голограмме точечного объекта, расположенного на перпендикуляре, восстановленном из центра голограммы.

*Ключевые слова*: Глубина резкости, Трехмерная фигура рассеяния, Разность хода, Разность фаз, Векторная сумма, Синтез голограмм.

*Цитирование*: **Корешев, С. Н.** Трехмерная фигура рассеяния, формируемая оптической системой при осевом расположении точечного объекта / С. Н. Корешев, Д. С. Смородинов, О. В. Никаноров, М. А. Фролова // HOLOEXPO 2018 : XV международная конференция по голографии и прикладным оптическим технологиям : Тезисы докладов. — М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2018. — С. 175–179.

## Введение

Существует несколько подходов к количественной оценке глубины резкости оптической системы. В традиционной оптике под глубиной резкости принято понимать такое смещение плоскости наблюдения изображения, при котором изображение точечного объекта, представляемое в виде геометрической точки, размывается в круг, диаметр которого равен диаметру центрального кружка картины дифракции Эйри [1]. В работе [2] приведена другая формула, полученная на основании интерференционной теории формирования изображений. Она не позволяет рассчитать глубину резкости, а лишь ограничивает сверху ее максимальное значение. Ели считать длину волны неизменной, то на величину глубины резкости оказывает влияние фактически только один параметр — числовая апертура оптической системы.

Это является серьёзной проблемой при разработке оптических систем с максимально возможной глубиной резкости. Метод, позволяющий обойти данные ограничения традиционных оптических систем, предложен в работе [3]. Он основан на замене традиционного проекционного объектива на синтезированную голограмму-проектор, формирующую требуемое изображение на поверхности полупроводниковой пластины. Синтез необходимой для его реализации голограммы требует применения такой объектной волны, которая фактически представляла бы собой суперпозицию нескольких объектных волн, формируемых одним и тем же фотошаблоном при нескольких расстояниях между объектом и плоскостью синтеза голограммы, различающихся между собой на некоторую заданную величину сдвига $\Delta$, не превышающую глубину резкости голограммы. При этом оптимизация величины сдвига, оказывающей существенное влияние на глубину резкости голограммы, невозможна без знания распределений комплексной амплитуды и интенсивности в трехмерной фигуре рассеяния, формируемой оптической системой, роль которой в данном случае выполняет голограмма-проектор.

## Расчёт распределения фазы и интенсивности в фигуре рассеяния, соответствующей изображению точки на оптической оси

Прямой расчет распределения фазы и интенсивности в трехмерной фигуре рассеяния, соответствующей изображению точечного объекта, требует точного решения задачи дифракции [4]. Полученные таким образом результаты точны, но чрезвычайно сложны для восприятия и не удобны для анализа. Вместе с тем применение принципа Гюйгенса — Френеля в сочетании с графическим методом сложения колебаний [5] позволяет получить значительно более удобные для последующего анализа результаты. Покажем это на примере изображения точечного объекта, формируемого голограммой-проектором и располагаемого на перпендикуляре, восстановленном из центра голограммы. Отметим, что для традиционной оптической системы этот случай соответствует изображению точечного объекта, располагаемому на оптической оси системы. Для простоты анализа ограничимся случаем одномерной голограммы.

Итак, пусть поверхность голограммы совпадает с осью $X$ (рис. 1), где точка $O$ является центром голограммы, а точкой $F$ обозначено положение восстановленного с ее помощью изображения точечного объекта в плоскости наилучшей установки. В этом случае в

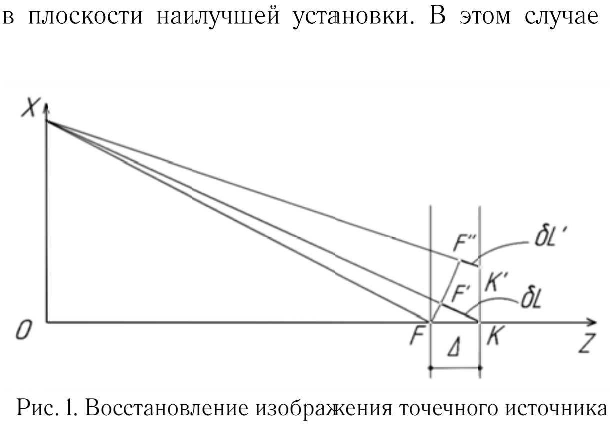


Рис. 1. Восстановление изображения точечного источника при сдвиге относительно плоскости наилучшей установки

точке $F$ интенсивность света в фигуре рассеяния будет максимальной, а величину сдвига фазы для этой точки можно принять равной 0. Определим для начала величины сдвига фазы и интенсивность в точке $K$, смещенной вдоль оптической оси относительно $F$ на величину $\Delta$. Общая интенсивность света в точке $K$ будет складываться как сумма комплексных амплитуд, приходящих от всех точек голограммы, возведённая по модулю в квадрат. Для расчётов выберем некоторую точку $X$, лежащую на плоскости голограммы. Поскольку мы условились считать суммарную фазу в точке F нулевой, то величина фазы во всех точках, лежащих на окружности с центром в точке $X$, будет одинакова. Соответственно, набег фазы в точке $K$ относительно $F$ будет зависеть от разности хода между лучами $XK$ и $XF'$, иначе говоря [5]

$$\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}\delta l=\frac{2\pi}{\lambda}\left(XK-XF'\right)=\frac{2\pi}{\lambda}\left(XK-XF\right), \qquad (3)$$

где $\lambda$ — рабочая длина волны; $\delta l$ — разность хода между лучами. В случае осевого луча она равна величине сдвига $\Delta$, то есть расстоянию $FK$. Для других случаев величина разности хода будет определяться следующим образом

$$\begin{aligned}\delta l &= XK-XF=\\ &=\sqrt{OX^2+(OF+\Delta)^2}-\sqrt{OX^2+OF^2}=\\ &=\sqrt{OX^2+OF^2+\Delta^2+2OF\Delta}-\\ &-\sqrt{OX^2+OF^2}.\end{aligned} \qquad (4)$$

Раскладывая выражение (4) в ряд Маклорена для квадратного корня [8], получаем

$$\begin{aligned}\delta l &= \Delta-\left(\frac{\Delta}{2}\cdot\frac{OX^2}{OF^2}+\frac{\Delta^3}{2\cdot OF^2}\right)=\\ &=\Delta\left(1-\frac{OX^2}{2OF^2}-\frac{\Delta^3}{2OF^2}\right).\end{aligned} \qquad (5)$$

Подставив (5) в (3), получим

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{2\pi}{\lambda}\Delta\left(1-\frac{OX^2}{2OF^2}-\frac{\Delta^3}{2OF^2}\right)\approx\\ &\approx\frac{2\pi}{\lambda}\Delta\left(1-\frac{OX^2}{2OF^2}\right).\end{aligned} \qquad (6)$$

Если же мы хотим посчитать изменение длины пути и, соответственно, сдвиг фаз не относительно точки $F$, а с учётом разности хода для осевого луча, то из (5) нужно вычесть величину сдвига $\Delta$.

$$\begin{aligned}\delta l'' &= (XK-OK)-(XF-OF)=\\ &= XK-XF-\Delta=\\ &=-\left(\frac{\Delta}{2}\frac{OX^2}{OF^2}+\frac{\Delta^3}{2OF^2}\right)\approx\frac{\Delta}{2}\frac{OX^2}{OF^2}.\end{aligned} \qquad (7)$$

$$\varphi''=-\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\Delta}{2}\frac{OX^2}{OF^2}. \qquad (8)$$

В случае если сдвиг фаз $\varphi''$ принять равным $2\pi$, то из выражения (8) можно вывести следующее равенство.

$$|\Delta|=\frac{2\lambda OF^2}{OX^2}=\frac{2\lambda}{\dfrac{OX^2}{OF^2}}\approx\frac{2\lambda}{A^2}, \qquad (9)$$

где $A$ — числовая апертура.

Выражение (9) совпадает с формулой (2) для ограничения глубины резкости.

Как уже было сказано выше, результирующая комплексная амплитуда в точке будет равна сумме дошедших до неё комплексных амплитуд от всех точек голограммы. Поскольку в нашем случае речь идёт о синтезированных голограммах, имеющих дискретную структуру [7, 8], то количество этих точек конечно, а каждая из них фактически представляет собой отдельный точечный источник. Удобнее всего комплексную амплитуду от точечного источника рассматривать в виде вектора, длина которого соответствует амплитуде, а направление — фазе [9].

Тогда суммарная комплексная амплитуда в некоторой точке будет представлять собой векторную сумму амплитуд от разных источников. Далее остаётся найти распределение комплексной амплитуды восстановленной волны в каждой из точек от $O$ до $X$. Отметим, что значения комплексной амплитуды симметричны относительно начала координат.

Сделаем это в обратном ходе лучей, т. е. рассматривая процесс записи голограммы. Поскольку точечный источник распространяет свет во всех направлениях равномерно, исходящее от него излучение можно изобразить в виде сферы, центр которой совпадает по положению с рассматриваемым точечным источником. Тогда естественно предположить, что в единицу времени через поверхность сферы будет проходить одинаковое количество энергии. Отсюда следует, что в нашем случае, если комплексную амплитуду в точке $O$ принять равной единичной величине $E_o$, то амплитуда в точке $X$ (рис. 1) будет равна

$$\begin{aligned}E_x &= \frac{E_o S_h}{S_l}=\frac{S_h}{S_l}=\frac{4\pi R_h^2}{4\pi R_l^2}=\\ &=\frac{4\pi OF^2}{4\pi XF^2}=\frac{OF^2}{XF^2}=\frac{OF^2}{OX^2+OF^2}.\end{aligned} \qquad (10)$$

Таким образом, при помощи полученных выражений можно рассчитать значение комплексной амплитуды в любой точке на перпендикуляре, восстановленном из центра голограммы, а, возведя его в квадрат, получим значение интенсивности в выбранной точке.

Вычислить суммарную комплексную амплитуду в точке $K$ можно через суммы проекций на координатные оси всех составляющих вектора суммарной комплексной амплитуды. Если комплексную амплитуду от одной точки считать как $E_x$, то её проекция на ось абсцисс будет считаться как косинус угла наклона вектора, рав-

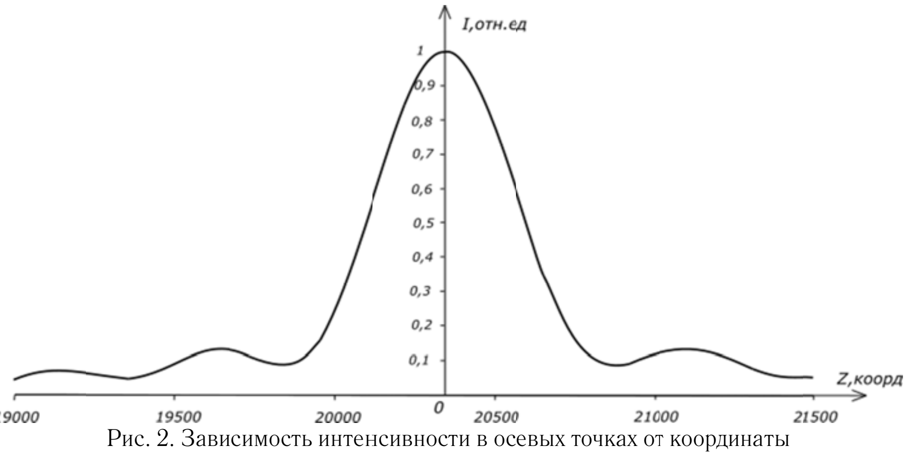


Рис. 2. Зависимость интенсивности в осевых точках от координаты

ного сдвигу фазы, на ось ординат — как синус. В общем обе составляющие будут складываться из всех значений амплитуды и фазы, пришедших от каждой из точек, лежащих на плоскости от $O$ до $X$

$$E_{\cos} = \sum_{x=0}^{x=X} \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\Delta\left(1 - \frac{x^2}{2OF^2}\right)\right]\frac{OF^2}{x^2 + OF^2}, \tag{11}$$

$$E_{\sin} = \sum_{x=0}^{x=X} \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}\Delta\left(1 - \frac{x^2}{2OF^2}\right)\right]\frac{OF^2}{x^2 + OF^2}. \tag{12}$$

Итоговое значение интенсивности в этом случае будет равно

$$I = E_{\sin}^2 + E_{\cos}^2. \tag{13}$$

Количество отсчётов на участке $OX$, которое необходимо взять для получения суммарного распределения интенсивности с достаточной точностью в целом зависит от типа оптической системы. Нетрудно заметить, что в случае, если фокусное расстояние OF значительно превышает радиус выходного зрачка $OX$, значение выражения $x^2/2 \cdot OF^2$ приближается к 0, а выражения $OF^2/(x^2 + OF^2)$ — наоборот, стремится к 1. К примеру, уже в случае, если $OF = 4x$, то первое выражение приобретает значение 0,031 25; а второе — 0,94. Следовательно, в таких случаях большее влияние на суммарное значение будет оказывать величина сдвига $\Delta$. В то же время, если $OF \approx OX$, указанные выражения влияют сильнее. В нашем случае выбор количества отчётов определялся результатами работы [8], в соответствии с которыми для успешной голографической регистрации, период дискретизации голограммы должен быть, как минимум, в 4 раза меньше характеристического размера объекта. То есть, если размер точки-объекта $a_t$ принять равным 80 × 80 нм, то размер одного пикселя на плоскости регистрации её голограммы должен быть не более 20 × 20 нм. Таким образом, отсчёты вдоль $OX$ брались каждые 20 нм.

Следует отметить относительную простоту полученных формул, позволяющих определить относительную интенсивность в любой точке на основании значений положения исследуемой точки относительно фокуса (значения $\Delta$, $\Delta'$ — для случая, когда точка расположена вне оси), по сравнению с известными выражениями, основанными на вычислении функций Ломмеля [4].

С помощью полученных выражений был построен график зависимости интенсивности от координаты $Z$ (расстояния от плоскости голограммы) на перпендикуляре, восстановленном из центра голограммы.

Все необходимые для этого расчёты проводились при условиях и параметрах синтеза голограмм, приведённых в работе [3]. Сама голограмма при этом считалась внеосевой, полученной с плоской опорной волной, падающей на плоскость синтеза голограммы под углом $\alpha$, равном 14,7°. Объектная волна считалась падающей по нормали на плоскость объекта, расположенную параллельно плоскости синтеза голограммы. Рабочая длина волны $\lambda$ была выбрана равной 13,5 нм; расстояние между плоскостью объекта и плоскостью регистрации голограмм $R_h$ = 20,3 мкм. Расстояние от плоскости голограммы до плоскости наилучшей установки также равно 20,3 мкм, плоскость регистрации изображений будем постепенно смещать относительно неё в обе стороны. Размер точки-объекта (минимального элемента структуры объекта, состоящего из нескольких точек) $a_t$ принят равным 80 × 80 нм², размер апертуры синтезируемых голограмм при таких условиях составляет 440 × 440 пикселей, при размере каждого 20 × 20 нм². При таких параметрах расстояние от $O$ до $X$ состоит из 220 точек, так как ось $Z$ проходит через центр голограммы перпендикулярно её плоскости.

На рис. 2 приведён график зависимости интенсивности на оси пятна рассеивания, представляющего собой трехмерное восстановленное изображение точечного объекта, от координаты $Z$, при этом максимальное значение интенсивности в точке $F$ принято за 1, а в остальных точках интенсивность оценивается в долях от максимума.

На графике чётко виден центральный максимум вблизи точки фокуса и несколько побочных, значительно менее выраженных на общем фоне. При этом даже на достаточно большом расстоянии от плоскости наилучшей установки интенсивность всё равно превышает нулевое значение, что, вероятно, связано с наличием осевого луча, следующего точно вдоль оси $Z$. При

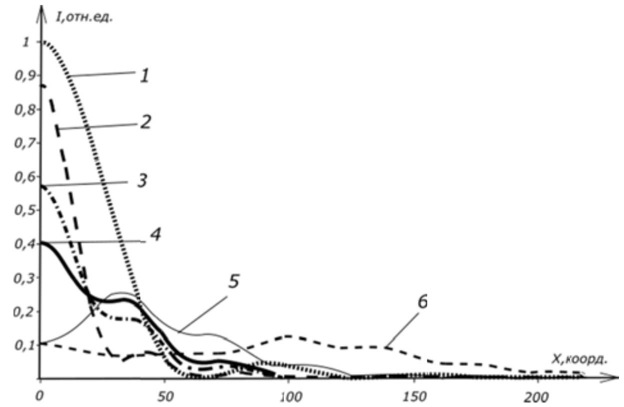


Рис. 3. Распределение интенсивности в восстановленном изображении точки при различных положениях плоскости регистрации

описанных выше условиях числовая апертура излучения $A$, дифрагировавшего на точечном объекте, может быть описана с помощью следующего выражения.

$$A = n\sin\theta = \frac{\lambda}{a_t}, \qquad (14)$$

где $n$ — показатель преломления среды, равный для воздуха 1; $\lambda$ — рабочая длина волны; $a_t$ — размер точки-объекта.

Зная указанные выше условия синтеза голограммы и, учитывая выражение (14), можно оценить теоретические пределы глубины резкости изображения. Согласно требованиям, традиционным для оптики, при установленных условиях синтеза она будет равна $b_l = \pm 237$ нм, а в соответствии с интерференционной теорией формирования изображений глубина резкости не должна превышать величины $b_2 = \pm 948$ нм. При положении плоскости наилучшей установке на расстоянии 20 345 нм от плоскости голограммы, диапазон возможных смещений плоскости регистрации изображения в пределах, соответствующих величине $b_l$ равен [20 108, 20 582], что примерно соответствует участку графика, на котором интенсивность превышает половину от максимума. Диапазон смещений с учётом только величины $b_2$ более широк: [19 397, 21 293], он включает не только центральный максимум, но и два побочных, лежащих по обе стороны от него.

Полученные выражения позволяют построить графики распределения энергии в поперечном сечении пятна рассеяния в зависимости от положения плоскости регистрации. На рис. 3 представлены графики, демонстрирующие распределение интенсивности в восстановленном изображении точки при различных положениях плоскости регистрации. В целях упрощения картины приведена только половина от распределения интенсивность, так как общая картина симметрична относительно оси $Z$.

Из приведенных графиков видно, что если плоскость регистрации располагается точно в плоскости наилучшей установки $F$ (график 1 на рис. 3), то картина

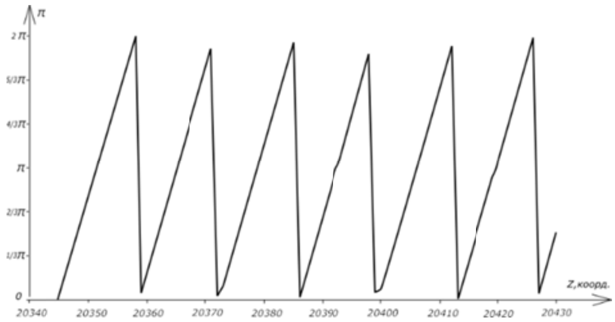


Рис. 4. Зависимость суммарного сдвига фазы в осевых точках от координаты

распределения интенсивности в изображении соответствует дифракционной картине точки [10]. Если сдвиг плоскости регистрации относительно $F$ не превышает величины глубины резкости $b_l$ (график 2), установленной согласно требованиям традиционной оптики, то центральный максимум несколько расширяется и уменьшается, но первый минимум и кольца ещё достаточно различимы. При сдвиге, равном $b_l$ (график 3) центральный максимум фактически сливается с первым побочным. При дальнейшем увеличении сдвига (графики 4–6) чёткое изображение точки постепенно разрушается — на больших расстояниях определить максимумы в целом уже невозможно.

Таким образом, наибольшая часть световой энергии в восстановленном изображении точки оказывается локализованной в объекте, имеющем сигарообразную форму, что соответствует выводам, представленным в работах [2, 4]. Его длина, при приведённых выше параметрах синтеза и восстановления голограммы, составляет порядка 1 мкм, толщина — около 120 нм.

При помощи использованного нами графического метода расчета можно определить не только зависимость относительной интенсивности от смещения от точки фокуса, но и изменение суммарного набега фазы по мере смещения. Как уже упоминалось выше, при использовании век векторного представления длина вектора оказывается величиной интенсивности, а угол его наклона — фазой. Тогда фазу можно вычислить на основании следующего выражения.

$$\Delta\varphi = \arccos\left(\frac{E_{\cos}}{\sqrt{E_{\sin}^2 + E_{\cos}^2}}\right). \qquad (15)$$

На рис. 4 представлен график, изображающий зависимость суммарного сдвига определённой с точностью до $2\pi$ фазы от смещения плоскости регистрации вдоль оси при указанных выше параметрах синтеза и восстановления голограммы. Значения фазы представлены на участке от 0 до $2\pi$, то есть за вычетом величины $2\pi n$, где $n = 1, 2...$

Хорошо заметна периодичность, при этом период сдвига равен рабочей длине волны, а величина самого сдвига фазы не превышает $2\pi$.

Однако также видно, что если при положении плоскости регистрации в фокусе суммарный сдвиг фазы считается нулевым, то по мере смещения он далеко не во всех случаях снова достигает 0. Это связано с дискретностью, поскольку сдвиг плоскости регистрации всегда производился на строго установленную величину и не всегда совпадает с реальным смещением, которое требуется для «обнуления» фазы. Из приведенного рисунка можно сделать вывод о том, что распределение фазы вдоль пятна рассеяния полностью определяется фазой, отсчитываемой вдоль главного луча восстановленного пучка лучей. При этом отстоящие от центра участки апертуры голограммы (оптической системы) практически не оказывают никакого влияния на распределение фазы вдоль оси пятна рассеяния.

## Заключение

Таким образом, в ходе проведённого исследования, был установлен характер изменения комплексной амплитуды, фазы и интенсивности в зависимости от величины сдвига относительно плоскости наилучшей установки и оптической оси. Полученные в результате расчётов выражения значительно проще аналогов, установленных путём решения задачи дифракции. Приведены результаты экспериментальных проверок установленных теоретических положений.

## Список источников


[1] **Цуканова, Г. И.** Прикладная оптика. Часть 2: Учебно-методическое пособие / Г. И. Цуканова, Г. В. Карпова, О. В. Багдасарова, В. Г. Карпов, Е. В. Кривопустова, К. В. Ежова, под ред. проф. А. А. Шехонина. — Учебное пособие. — СПб: СПб ГИТМО (ТУ), 2003. — 73 с.

[2] **Франсон, М.** Оптика спеклов / М. Франсон; пер. с французского (M. Francon. La granularite laser (speckle) et ses applications en optique. Institut d'Optique et Universite de Paris. 1978). — М.: Мир, 1980. — 172 с.

[3] **Корешев, С. Н.** Методы увеличения разрешающей способности и глубины резкости синтезированных голограмм / С. Н. Корешев, О. В. Никаноров, М. А. Фролова, Я. А. Новицкая, Р. И. Хисамов // Оптический журнал. — 2016. — Том 83. — № 12. — С. 62–68.

[4] **Борн, М.** Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. — М.: Наука, 1973. — 720 с.

[5] **Ландсберг, Г. С.** Оптика / Г. С. Ландсберг. — Изд. 6-е, стереотипное. — М.: Физматлит, 2003. — 848 с.

[6] **Фихтенгольц, Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. — М.: Физматлит, 2003. — 680 с.

[7] **Корешев, С. Н.** Влияние дискретности синтезированных и цифровых голограмм на их изображающие свойства / С. Н. Корешев, Д. С. Смородинов, О. В. Никаноров // Компьютерная оптика. — 2016. — Том 40. — № 6. — С. 793–801.

[8] **Корешев, С. Н.** Изображающие свойства дискретных голограмм. I. Влияние дискретности голограммы на восстановленное изображение / С. Н. Корешев, О. В. Никаноров, Д. С. Смородинов // Оптический журнал. — 2014. — Том 81. — № 3. — С. 14–19.

[9] **Корешев, С. Н.** Программный комплекс для синтеза и цифрового восстановления голограмм-проекторов / С. Н. Корешев, О. В. Никаноров, Ю. А. Иванов // Научно-технический вестник СПб ГУ ИТМО. — 2009. — № 5 (63). — С. 42–47.

[10] **Родионов, С. А.** Основы оптики. Конспект лекций / С. А. Родионов. — СПб.: СПб ГИТМО (ТУ), 2000. — 167 с.


## 3D scattering figure formed by the optical systemat the axial location of a point object

*S. N. Koreshev, D. S. Smorodinov, O. V. Nikanorov, M. A. Frolova*
Saint Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics, Saint Petersburg, Russia

A quantitative evaluation of the depth of field of optical systems is given. The results of the calculation of the distribution of the complex amplitude and intensity in the three-dimensional scattering figure formed by the optical system for the axial location of a point object are presented. The work was carried out in the interests of developing optical systems with increased depth of field with reference to a synthesized hologram of a point object located on a perpendicular reconstructed from the hologram center.

Keywords: Depth of field, Three-dimensional scatter figure, Path difference, Phase difference, Vector sum, Hologram synthesis.