

# Аберрации голограмм, обусловленные нарушением закона Брэгга и вариациями глубины и формы профиля их поверхностной решетки

С. Н. Корешев<sup>1</sup>, С. О. Старовойтов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Филиал АО «Корпорация «Комета» - «Научно-проектный центр оптоэлектронных комплексов наблюдения», Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup> Университет информационных технологий, механики и оптики, Санкт-Петербург, Россия

Исследованы аберрации голограмм, обусловленные нарушением закона Брэгга и вариациями глубины и формы профиля их поверхностной решетки. Работа выполнена для случаев отражательной рельефно-фазовой голограммы и пропускающей объемной голограммы без потерь. Установлено, что приведенное в литературе и широко используемое предположение о том, что изображающие свойства голограммы, в том числе и ее аберрации, полностью определяются картиной выхода страт на поверхность голограммы верно для отражающих рельефно-фазовых голограмм и верно лишь отчасти для пропускающих объемных голограмм. У них отступления от закона Брэгга, как по углу падения, так и по длине волны восстанавливающего пучка могут привести к значительным аберрациям в преобразуемых голограммными оптическими элементами пучках лучей.

*Ключевые слова:* Голограммные оптические элементы, Изображающие свойства, Аберрации голограмм, Закон Брэгга, Объемные голограммы, Рельефно-фазовые голограммы.

*Цитирование:* Корешев, С. Н. Брэгга и вариациями глубины и формы профиля их поверхностной решетки / С. Н. Корешев, С. О. Старовойтов // HOLOEXPO 2022: XIX Международная конференция по голографии и прикладным оптическим технологиям : Тезисы докладов. — Барнаул: ИП Колмогоров И. А., 2022. — С. 114–120.

## Введение

Современные методы расчета оптических систем, содержащих голограммные оптические элементы (ГОЭ), основываются на предположении о том, что изображающие свойства голограммы, в том числе и ее аберрации, полностью определяются соответствующей ей поверхностной решеткой, т. е. картиной выхода страт на поверхность голограммы [1]. При этом толщина для объемной голограммы или высота и форма профиля рельефа в случае рельефно-фазовой голограммы оказывают влияние лишь на ее дифракционную эффективность. Поэтому исследователи, старающиеся оптимизировать разрабатываемые оптические системы с ГОЭ как по аберрационным характеристикам, так и по дифракционной эффективности, ограничиваются лишь введением модулей расчета дифракционной эффективности в традиционные программы расчета оптических систем, обеспечивающие трассировку лучей в системах, содержащих поверхностные дифракционные решетки [2]. При таком, широко используемом в настоящее время, подходе к расчету и разработке оптических систем с ГОЭ полностью игнорируется влияние на аберрации голограмм таких важных факторов как вариации высоты и формы профиля рельефно-фазовых голограмм и нарушение закона Брэгга для объемных голограмм.

В настоящей работе приведены результаты исследования влияния указанных выше параметров голограмм на их абберационные свойства, выполненного с целью определения условий, при которых их можно считать справедливым. Исследование проведено для случаев отражательных рельефно-фазовых голограмм и объемных диэлектрических пропускающих голограмм без потерь.

## 1. Оценка влияния вариаций высоты и формы профиля отражательных рельефно-фазовых ГОЭ на абберации, вносимые ими в преобразуемые волновые фронты

При проведении анализа будем исходить из того, что форма профиля голограммных структур, близка к форме равнобокой трапеции. Кроме того, будем считать, что бока трапеции лежат на касательных, к кривой, описывающей профиль, в точках, соответствующих половине высоты рельефа (см. рис. 1).

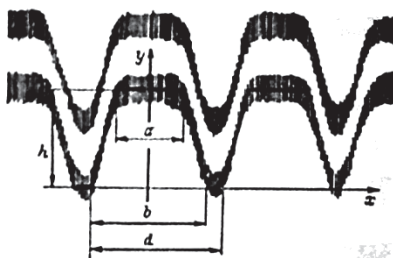


Рис. 1. Параметры, описывающие форму профиля рельефа

Буквами  $a$  и  $b$  на этом рисунке обозначены основания трапеции,  $h$  – ее высота, а  $d$  – локальный пространственный период в данной точке голограммной структуры. Запишем выражение, описывающее амплитуду поля  $U(x)$ , отраженного от одномерной рельефной структуры, освещаемой нормально падающей плоской волной единичной амплитуды, в плоскости  $y=0$ , т.е. в плоскости, соприкасающейся с «низинами» рельефа:

$$U(x) = R \left\{ \sum_{n=0}^N \left[ \exp(-jk2h) \operatorname{rect} \left( \frac{x-nd}{a} \right) + \operatorname{rect} \left( \frac{x-(n+\frac{1}{2})d}{a-b} \right) + \exp \left[ -jk \left( -\frac{4h}{b-a} \left( x - \frac{b}{2} - nd \right) \right) \right] \operatorname{rect} \left( \frac{2x-\frac{a+b}{2}-2nd}{b-a} \right) + \exp \left[ -jk \left( \frac{4h}{b-a} \left( x + \frac{b}{2} - (n+1)d \right) \right) \right] \operatorname{rect} \left( \frac{2x+\frac{a+b}{2}-2(n+1)d}{b-a} \right) \right] \right\} \quad (1)$$

где  $k$  – волновое число;  $N+1$  – число периодов структуры, освещаемых плоской волной;  $n$  – индекс суммирования;  $R$  – коэффициент отражения по амплитуде поверхности голограммы;  $h$  – высота рельефа;  $a$  и  $b$  – размеры оснований трапеции;  $d$  – пространственный период структуры. Из (1) с помощью преобразования Фурье найдем выражение, описывающее амплитуду поля, продифрагировавшего на рельефной структуре, в дальней зоне  $V(\xi)$ :

$$V(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x) \exp(-2\pi\xi x) dx, \quad (2)$$

где  $\xi$  – пространственная частота.

Анализируя выражение (2) с учетом (1) можно сделать вывод о том, что не только интенсивность, но и фаза восстановленной волны зависит от параметров рельефа

голограммной структуры. Причем фаза формируемой ГОЭ волны для каждого значения  $\xi$  может быть вычислена с точностью до постоянной при помощи выражения:

$$tg\varphi = \frac{Im(V(\xi))}{Re(V(\xi))}. \quad (3)$$

Следовательно, вариации высоты либо параметров формы профиля рельефа в пределах апертуры ГОЭ обуславливают появление дополнительной разности, иначе говоря, приводят к абберациям ГОЭ. Аналитическое выражение, описывающее зависимость фазы волны в первом порядке дифракции от параметров рельефа, может быть представлено исходя из (1–3) в виде:

$$tg\varphi = \frac{LA_1 A_2 (B_2 C_2 + B_1 C_1) - A_2^2 B_2 C_1 - A_1^2 B_1 C_2}{A_1 A_2 (B_2 C_1 - B_1 C_2) + LA_2^2 B_1 C_1 - LA_1^2 B_2 C_2}, \quad (4)$$

где  $A_1 = \sin(2\pi H)$ ,  $L = Q/(2H)$ ,  $A_2 = \cos(2\pi H)$ ,  $S = (a+b)/(2d)$ ,  $B_1 = \sin(\pi S)$ ,  $Q = (b-a)/(2d)$ ,  $B_2 = \cos(\pi S)$ ,  $H = h/\lambda$ ,  $C_1 = \sin(\pi Q)$ ,  $C_2 = \cos(\pi Q)$ .

Результаты расчета фазы восстановленной волны, выполненные с помощью выражения (4) для различных значений параметров  $h$ ,  $S$  и  $Q$ , свидетельствуют о том, что в наиболее интересном, с точки зрения отражательного ГОЭ, случае глубины рельефной структуры, не превышающей  $2h_0$ , где  $h_0$  — глубина рельефа, обеспечивающая максимальную дифракционную эффективность для данной формы профиля, фаза восстановленной волны практически пропорциональна глубине рельефа. При этом коэффициент пропорциональности всецело определяется величинами параметров  $S$  и  $Q$ , описывающими форму профиля ГОЭ. Своеобразным исключением является случай прямоугольного профиля, т.е.  $Q = 0$ , при котором коэффициент пропорциональности зависимости  $\varphi$  от  $h$  равен  $K = K_0 = -2\pi/\lambda$  независимо от величины параметра  $S$ , и случай профиля со скважностью  $S = 0,5$ , который характеризуется той же величиной коэффициента пропорциональности независимо от величины параметра  $Q$ . В остальных случаях коэффициент пропорциональности зависит как от величины параметра  $Q$ , так и от величины параметра  $S$ . Таким образом, вариации глубины и формы профиля рельефно-фазовой голограммной структуры ГОЭ в пределах его апертуры однозначно приводят к абберациям в восстановленном в первом порядке дифракции волновом фронте. Полученные результаты свидетельствуют о том, что в наиболее часто встречающихся на практике случаях прямоугольной формы профиля рельефа с любой скважностью допустимыми с точки зрения критерия Рэля можно считать вариации высоты рельефа отражательных голограмм, не превышающие  $1/4$  рабочей длины волны. Аналогичный вывод будет справедлив и для рельефа со скважностью  $0,5$  при любой форме его профиля. При других параметрах формы профиля рельефа, например при его скважности  $0,3$  и  $Q$ , лежащем в пределах от  $0,3$  до  $0,7$ , допуск на вариации высоты рельефа должен быть уменьшен примерно на  $20\%$ . Указанная выше величина допуска на высоту рельефа свидетельствует о том, что для первого порядка дифракции отражательной рельефно-фазовой голограммы вкладом вариаций высоты рельефа в абберации голограммы на практике можно пренебречь. При этом следует иметь в виду, что вариации глубины и формы

профиля рельефной структуры оказывают влияние не только на первый, но и на остальные порядки дифракции.

## 2. Влияние нарушения закона Брэгга при восстановлении объемных голограмм на aberrации, вносимые ими в преобразуемые волновые фронты

Анализ влияния нарушений закона Брэгга на aberrационные свойства объемных голограмм проведем в рамках теории Когельника [3]. При этом ограничимся лишь случаем диэлектрических пропускающих голограмм без потерь. В соответствии с [3] комплексная амплитуда волны, восстановленной с помощью рассматриваемой объемной голограммы,  $S$  с точностью до постоянной фазы может быть описана с помощью выражения:

$$S = Ue^{-j\xi}, \quad (5)$$

где:  $U$  – действительная амплитуда, определяемая параметрами голографической решетки и не зависящая от величин  $\Delta\theta$  и  $\Delta\lambda$ , описывающих отступление от закона Брэгга по углу падения и длине волны восстанавливающей волны;  $\xi$  – фаза восстановленной волны, описываемая выражением

$$\xi = \frac{\vartheta d}{2C_s} \quad (6)$$

Здесь:  $d$  – толщина голограммы,  $\vartheta$  – параметр, описывающий величину отступлений от закона Брэгга,  $C_s$  – параметр, учитывающий длину волны записи решетки, ее период, угол наклона страт и угол падения опорной волны.

$$\vartheta = \frac{2\pi}{\Lambda} \left\{ \Delta\theta \sin(\phi - \theta) - \frac{\Delta\lambda}{2\Lambda n} \right\}, \quad (7)$$

$$C_s = \cos\theta - \frac{\lambda}{\Lambda n} \cos\phi, \quad (8)$$

где:  $\Lambda$  – локальный период голографической решетки, измеряемый вдоль перпендикуляра к ее стратам,  $\phi$  – угол, который составляет перпендикуляр, опущенный на страты с осью  $z$ ,  $\theta$  – угол падения опорной волны при регистрации голограммы,  $n$  – показатель преломления среды голограммы (см. рис. 2).

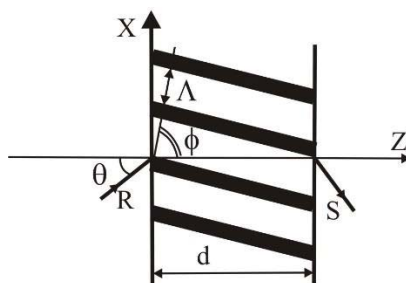


Рис.2. Объемная голографическая решетка

Рассмотрим случай восстановления объемной пропускающей голограммы на длине волны ее регистрации. При этом условии выражение (6) с учетом (7) и (8) может быть преобразовано к виду:

$$\xi = 2\pi V d \Delta\theta,$$

$$V = \frac{\sin\phi \cos\theta - \cos\phi \sin\theta}{2\Lambda \left\{ \cos\theta - \frac{\lambda}{\Lambda n} \cos\phi \right\}}. \quad (9)$$

Из (9) получим выражение, описывающее дополнительный набег оптического пути восстановленной волны  $L$ , обусловленный  $\Delta\theta$ , т.е. нарушением закона Брэгга

$$L = V \lambda d \Delta\theta. \quad (10)$$

Рассмотрим частный случай объемной голограммы, страты которой располагаются перпендикулярно поверхности регистрирующей среды, т.е. рассмотрим случай  $\phi = \pi/2$ . Возможные схемы регистрации и восстановления такой объемной голограммы, или, точнее сказать, голограммной линзы представлены на рис. 3. Здесь  $H$  — голограммная линза,  $N$  — нормаль к поверхности голограммы,  $R, C, O, I$  — опорный, восстанавливающий, объектный точечные источники и восстановленное изображение, соответственно,  $\theta$  — угловая апертура рассматриваемых пучков,  $\Delta\theta$  — отступление от закона Брэгга по углу падения восстанавливающей волны.

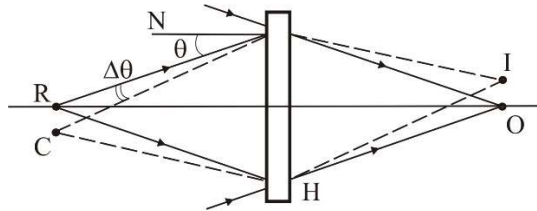


Рис.3. Схема регистрации и восстановления голограммы

В рассматриваемом случае (9) и (10) можно привести к виду

$$V = \frac{1}{2\Lambda} = \frac{\sin\theta}{\lambda}. \quad (11)$$

$$L = \Delta\theta d \sin\theta \quad (12)$$

Из (12) следует, что отступление угла падения восстанавливающей волны от угла падения объектной, либо опорной волны при регистрации голограммы на угол  $\Delta\theta$  приведет к дополнительному набегу оптического пути восстановленной волны. Величина этого дополнительного набега пропорциональна  $\Delta\theta$ ,  $d$  и локальной пространственной частоте в рассматриваемой точке голограммы, определяемой параметром  $\sin\theta$ . Сам по себе этот набег не скажется на качестве восстановленного с помощью голограммы изображения. Опасны лишь его вариации в пределах апертуры пучка лучей, соответствующего восстановленному изображению точечного источника. Эти вариации в рассматриваемом случае будут обусловлены изменением угла падения лучей восстанавливающего пучка на поверхность голограммы в пределах его угловой апертуры. Из (12) можно сделать несколько выводов. Во-первых, о том, что нарушение закона Брэгга не приводит к появлению дополнительных aberrаций объемных голограмм в случае их регистрации и восстановления с помощью параллельных опорного и восстанавливающего пучков лучей. Во-вторых, о том, что aberrации восстановленного изображения определяются апертурой восстанавливающего пучка лучей или, иными словами, распределением локальных пространственных частот по

апертуре голограммы. Так, в типичном для голографии случае  $\Delta\theta = 2^\circ = 0,04$  рад,  $\lambda = 0,63$  мкм,  $d = 10$  мкм и локальной пространственной частоты, изменяющейся от 0 до  $1600\text{мм}^{-1}$  ( $\sin\theta = 0,5$ ) величина дополнительного набега пути равна  $0,2$  мкм, или  $0,3\lambda$ .

Полученные данные позволяют сделать вывод о том, что нарушение закона Брэгга из-за несоответствия угла падения восстанавливающей волны углу падения опорной, либо объектной волны при регистрации голограммы приводит к появлению aberrаций в восстановленном с помощью голограммы изображении. Причем, величина этих aberrаций сравнима с традиционно учитываемыми aberrациями, обусловленными ее поверхностной решеткой.

Перейдем к случаю восстановления голограммы на длине волны, отличной от длины волны при ее регистрации, т.е. к случаю использования ГОЭ в качестве диспергирующих элементов спектральных приборов. При этом положим  $\Delta\theta = 0$ . При этом условии (7) можно переписать в виде

$$\vartheta = \frac{\pi\Delta\lambda}{\Lambda^2 n}, \quad (13)$$

Отсюда, с учетом (6) получим

$$\xi = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda d \Delta\lambda}{4\Lambda^2 n \left\{ \cos\theta - \frac{\lambda \cos\phi}{\Lambda n} \right\}}. \quad (14)$$

Для рассматриваемого ранее случая  $\phi = \pi/2$  (13) и (14) будут иметь вид

$$\xi = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{d \Delta\lambda \sin\theta}{\Lambda n} \operatorname{tg}\theta, \quad (15)$$

$$L = \frac{d \Delta\lambda \sin\theta}{\Lambda n} \operatorname{tg}\theta. \quad (16)$$

Из (16) следует, что дополнительные aberrации, обусловленные нарушением закона Брэгга при восстановлении объемной голограммой, используемой в качестве диспергирующего элемента в спектральных приборах, вносятся в преобразуемые с ее помощью пучки лучей лишь в случае вариаций угла  $\theta$  в пределах апертуры восстанавливающего пучка лучей. Такие вариации могут быть обусловлены использованием непараллельных опорного либо восстанавливающего пучков лучей. В случае регистрации объемной голографической решетки с помощью параллельного опорного пучка и ее восстановлении параллельным восстанавливающим пучком лучей объем голограммы не приводит к дополнительным aberrациям голограммы.

### Заключение

В работе показано, что приведенное в [1] предположение о том, что изображающие свойства голограммы, в том числе и ее aberrации, полностью определяются картиной выхода страт на поверхность голограммы верно лишь отчасти. Да, действительно вариации глубины и формы профиля отражательных рельефно-фазовых голограмм при средних глубинах их профиля в четверть рабочей длины волны практически не сказываются на aberrациях преобразуемых с их помощью пучков лучей. Иная ситуация складывается в случае объемных пропускающих голограмм, восстанавливаемых непараллельным пучком лучей, или зарегистрированных с

помощью непараллельного опорного пучка лучей. Здесь отступления от закона Брэгга, как по углу падения, так и по длине волны восстанавливающего пучка могут привести к значительным абберациям в преобразуемых ГОЭ пучках лучей. Проведенное исследование однозначно свидетельствует о необходимости дополнения программ расчета оптических систем с объемными ГОЭ модулями расчета аббераций, обусловленных отступлением от закона Брэгга.

#### Список источников

- [1] Колфилд Г. Оптическая голография / Под ред. Г. Колфилда — М. : Мир, 1982, — 735с.
- [2] Муслимов, Э. Р. Комплексное использование методов анализа связанных волн и трассировки лучей при проектировании спектрографов с объемно-фазовыми дифракционными решетками / Э. Р. Муслимов, Н. К. Павлычева // Тезисы докладов XVI международной конференции по голографии и прикладным оптическим технологиям. — 2019. — С. 365-373.
- [3] Kogelnik H. Coupled wave theory for thick hologram gratings / H. Kogelnik // The Bell system technical journal. — 1969. — V. 48. — № 9. — P. 2909 – 2947.

## Hologram aberrations resulting from the violation of Bragg's law and variations in the depth and shape of the profile of their surface gratings

*S. N. Koreshev<sup>1</sup>, S. O. Starovoitov<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> Branch of "Kometa" Corporation-Scientific Engineering Research Center for Optoelectronic Surveillance Systems, Saint-Petersburg, Russia

<sup>2</sup> ITMO University, St. Petersburg, Russia, Saint-Petersburg, Russia

Hologram aberrations resulting from the violation of Bragg's law and variations in the depth and shape of surface gratings are investigated. Study is conducted for reflecting relief-phase holograms and lossless transmitting volume holograms. The commonly used assumption that the imaging properties of the hologram are fully determined by surface pattern was shown to be generally true for relief-phase holograms and only partially true for volume holograms. The deviations from Bragg's law can lead to significant aberrations. This study demonstrates that the modules for calculating the aberrations caused by the deviations from Bragg's law should be added to the optical design software.

*Keywords:* Aberrations of surface relief and volume holograms, Surface pattern, Variations in the depth and shape of surface gratings, Violation of Bragg's law.