

Об аппроксимации передаточной характеристики схемы голографии Фурье

А. О. Гаугель, А. В. Павлов

Университет информационных технологий, механики и оптики, Санкт-Петербург, Россия

В рамках задачи аналитического описания отклика схемы голографии Фурье показана возможность аппроксимации реальных передаточных характеристик гауссово-подобными функциями. Даны модель и оценки погрешностей аппроксимации применительно к обработке изображений со степенными пространственно-частотными спектрами амплитуд для разных условий записи голограмм. Правомочность подхода подтверждена сравнением с экспериментальными данными.

Ключевые слова: Оптика, Голография, Дифракционная эффективность, Передаточная функция, Импульсный отклик системы.

Цитирование: Гаугель, А. О. Об аппроксимации передаточной характеристики схемы голографии Фурье / А. О. Гаугель, А. В. Павлов // HOLOEXPO 2022: XIX Международная конференция по голографии и прикладным оптическим технологиям : Тезисы докладов. — Барнаул: ИП Колмогоров И. А., 2022. — С. 277–284.

Введение

При описании 4f схемы голографии Фурье в качестве передаточной характеристики $H(\nu)$ используется измеряемая в требуемом порядке дифракции (в статье – в +1-м) зависимость по интенсивности локальной дифракционной эффективности $\eta(\nu)$ голограммы от пространственной частоты ν

$$H^p(\nu) = \eta(\nu) = \hat{H}^p S(\nu), \quad (1)$$

где верхний индекс p указывает порядок дифракции, в котором проводятся измерения, $S(\nu)$ – пространственно-частотный спектр мощности эталонного образа, использованного для записи голограммы, а \hat{H} – оператор голографической регистрирующей среды (ГРС), учитывающий условия записи голограммы и экспозиционные характеристики ГРС (ЭХ ГРС).

Вместо импульсного отклика из практических соображений часто используется автокорреляционная функция (АКФ) записанного на голограмме эталона, формируемая в +1 порядке дифракции в выходной плоскости Out при освещении голограммы эталонным спектром $S(\nu)$ (предъявлении во входной плоскости In эталонного образа) и связанная с передаточной характеристикой для +1-го порядка дифракции (1) преобразованием Фурье

$$R(\zeta) = \hat{F} H^{+1}(\nu), \quad (2)$$

где ζ – координата в задней фокальной плоскости второй фурье-преобразующей линзы L2 – выходной плоскости схемы Out, \hat{F} – оператор преобразования Фурье. АКФ представляет собой дифракционно-ограниченное изображение точечного опорного источника, использованного при записи голограммы, т.е. функцию размытия точки.

Для реальной информации характерны пространственно-частотные спектры мощности, со степенным спадом [2-4]. Применительно к схеме голографии Фурье (рис.1), передаточная характеристика (1) при степенных спектрах эталонных образов, записанных на голограмме, в ограниченном частотном диапазоне, определяемым динамическим диапазоном ЭХ ГРС, часто может быть аппроксимирована экспоненциальными функциями, поскольку:

а) тракты ввода информации суть дополнительные низкочастотные фильтры (НЧФ) [1];

б) пространственное ограничение размера обрабатываемых образов апертурой кадрового окна ведет к ослаблению нулевых и низкочастотных компонент спектра – сглаживанию максимума записанного спектра относительно эталонного в низкочастотном диапазоне;

в) ЭХ ГРС обуславливают дополнительную полосовую фильтрацию на [4-10];

г) дополнительная фильтрация обусловлена также и форм-фактором голограммы [11], особо актуальным именно для голограмм Фурье [4, 8-10].

Привлекательна аппроксимация передаточных характеристик функциями Гаусса, но реальные спектры характеризуются показателем степени аргумента (пространственной частоты), отличным от 2, вследствие чего Гауссова модель в общем случае дает неадекватное описание передаточной характеристики и АКФ схемы. Поиску удобной и адекватной модели аппроксимации отклика $4f$ схемы посвящен ряд статей [4,8-10]. Но усложнение задач, решаемых методом голографии Фурье [14-22] актуализирует вопрос адекватной, наглядной и вычислительно незатратной аппроксимации.

В докладе показаны возможности и ограничения аппроксимации передаточной характеристики и корреляционного отклика схемы голографии Фурье гауссово-подобной моделью в предположении записи голограммы при равенстве или превышении амплитудой опорного пучка локальной амплитуды пучка эталонного на нулевой пространственной частоте. Подход позволяет найти компромиссное решение дилеммы адекватность – наглядность аналитической модели и снизить требования к вычислительной мощности процессора в случае компьютерной реализации за счет использования аналитической модели.

1. Подход и модель аппроксимации

Представим передаточную характеристику схемы, т.е. записанный на голограмме эталонный спектр мощности $S(v)$ со степенным спадом, экспоненциальной моделью

$$H(v) = \exp \left(-\ln(\alpha) \cdot \left(\frac{-v}{v_\alpha} \right)^D \right), \quad (3)$$

где v — пространственная частота, $\eta(v)$ — зависимость локальной дифракционной эффективности голограммы (ДЭ) от пространственной частоты, D — показатель степени, v_α —

параметр модели – частота, измеряемая по уровню $\alpha = \frac{H(v_\alpha)}{H(0)} = \frac{\eta(v_\alpha)}{\eta(0)}$, т. е. определяемому как

отношение значения передаточной характеристики (локальной ДЭ голограммы) на данной

частоте ν_α к её максимальному значению (в рамках подхода – на нулевой частоте). Удобство этой модели в том, что параметр ν_α не изменяется при изменении показателя степени D , а при $\alpha = 0,606$ и $D = 2$ имеем Гауссову модель. Для простоты и наглядности далее рассмотрим частный вариант уровня $\alpha = 0,606$, т.е.

$$H(\nu) = \exp\left(\frac{-\nu^D}{2\nu_{0,606}^D}\right), \quad (4)$$

где $\nu_{0,606}$ – параметр, равный частоте, на которой локальная дифракционная эффективность голограммы $\eta(\nu) = \exp(0,5) = 0,606$ от её максимального значения $\eta(0)$.

На рис.1 показаны зависимости модуля относительной погрешности аппроксимации (3).

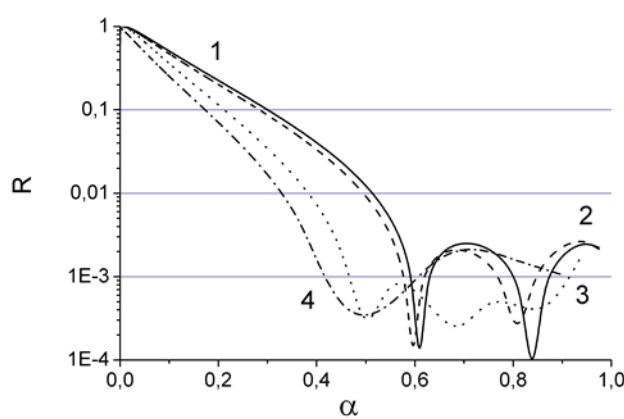


Рис. 1. Зависимости модуля относительной погрешности R аппроксимации моделью (4) от уровня спектра α : 1 – степенного спектра мощности $S(\nu) = \nu^{-2,6}$; 2 – с учетом НЧФ; 3 – с учетом сигмоидальной ЭХ ГРС, ФФ, и НЧФ ($D=1,07$, $\nu_{0,606}=6,57$); 4 – с учетом сигмоидальной ЭХ ГРС, ФФ, и НЧФ ($D=1,01$, $\nu_{0,606}=5,551$)

Из рис. 2 видно, что с ростом показателя степени D погрешность аппроксимации уменьшается, а подбор параметров модели аппроксимации, физически обусловленных режимом записи голограммы и её обработки, включая ЭХ ГРС, позволяет оптимизировать относительную погрешность в требуемом диапазоне интенсивностей спектра (локальной дифракционной эффективности голограммы $\eta(\nu)$ – передаточной характеристики схемы), связанном с диапазоном пространственных частот. Для аналоговых методов обработки традиционно считается допустимой относительная погрешность не более 0,1, этот уровень превышает только в высокочастотной области – экспоненциальная модель (4) дает заниженные сравнительно со степенной значения на высоких частотах.

Корреляционный отклик схемы рис.1, как фурье-образ функции (4), описывается аналогичным выражением только при $D=2$, то есть только для функции Гаусса $G(\nu)$. Примем для АКФ, т.е. фурье-образа функции (4), также гауссово-подобную модель аппроксимации

$$R(\zeta) = \hat{F}H^+(\nu) = \hat{F}\exp\left(\frac{-\nu^D}{2\nu_{0,606}^D}\right) \approx \exp\left(\frac{-\zeta^{d(D)}}{2\left(\zeta_{0,606}(D, \nu_{0,606})\right)^{d(D)}}\right), \quad (4)$$

где $d(D)$ – показатель степени, зависящий от показателя степени D в модели спектра (4), а параметр $\zeta_{0,606}(D, \nu_{0,606})$ аппроксимируем выражением $\zeta_{0,606}(D, \nu_{0,606}) = \text{Кр}(D) \cdot \gamma$, где $\text{Кр}(D) = \frac{\zeta_{0,606}(D, \nu_{0,606})}{\gamma}$ – функциональный коэффициент, задающий связь параметра $\zeta_{0,606}(D, \nu_{0,606})$ для произвольного показателя степени аргумента D с параметром γ фурье-образа функции Гаусса.

Функциональный коэффициент $\text{Кр}(D)$ был получен численно, для этого построено семейство зависимостей отношения параметров $\zeta_{0,606}/\gamma$ для ряда значений показателя степени D в диапазоне $D \in [0,5, 4]$ и диапазона значений параметра спектра амплитуд (4) $\nu_{0,606} \in [1, 100]$ пикселей при длине реализации спектра $N = 2^{18} = 262144$. Значения N и диапазона параметра спектра $\nu_{0,606}$ были выбраны из соображений обеспечения точности численного моделирования корреляционного отклика.

Были рассмотрены три модели аппроксимации, предварительно выбранные из соображений визуального сходства графического представления моделей с расчетными данными: сигмоидальная

$$\text{Кр}_s(D) = a_s \left(1 - \exp(-b_s (D - c_s))^{e_s} \right), \quad (5)$$

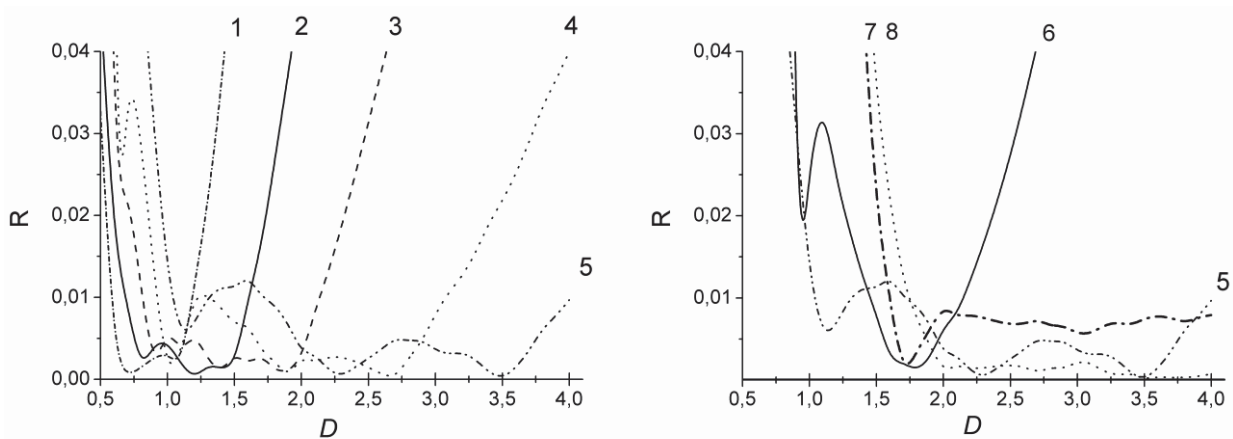
логарифмическая (хорошее визуальное соответствие в диапазоне $D \in [1,0, 2,0]$)

$$\text{Кр}_{ln}(D) = (\ln(D + a_{ln}))^{c_{ln}} + b_{ln}, \quad (6)$$

и гиперболическая (хорошее визуальное соответствие в диапазоне $D > 2,0$)

$$\text{Кр}_{hyp}(D) = 1,6 \left(1 - \frac{1}{D} \right) + a_{hyp}, \quad (7)$$

где a, b, c и e – параметры, буквенные индексы при них указывают на модель. Подбор параметров проводился по критерию минимума среднего квадрата отклонения (СКО) значения аппроксимации результатов численных экспериментов. На рис.2.а и 2.б даны относительные погрешности аппроксимации коэффициента Кр этими моделями.



а) Относительная погрешность аппроксимации коэффициента K_p логарифмической моделью

б) Относительная погрешность аппроксимации коэффициента K_p гиперболической моделью

Рис. 2. Зависимости относительной погрешности R аппроксимации коэффициента $K_p(D)$ от показателя степени D : 1 – модель (5) для диапазона $[0,5, 1,0]$; 2 – модель (5) для диапазона $[0,5, 1,5]$; 3 – модель (5) для диапазона $[0,5, 2,0]$; 4 – модель (5) для диапазона $[0,5, 3,0]$; 5 – модель (5) для диапазона $[0,5, 4,0]$; 6 – модель (6) для диапазона $[1,0, 2,0]$; 7 – модель (7) для диапазона $[2,0, 3,0]$; 8 – модель (7) для диапазона $[3,0, 4,0]$

Нахождение зависимости $K_d(D)$ проведено по критерию минимума СКО модели аппроксимации (6) от фактического корреляционного отклика в диапазоне значений $\zeta \in [0, \zeta_{\max}]$, где ζ_{\max} определялась по трем критериям:

- а) представления 99,5% энергии спектра применительно к $D=2$ [1];
- б) динамическому диапазону измерения и, соответственно, аппроксимации АКФ 1 порядок;
- в) динамическому диапазону измерения АКФ 2 порядка.

Полученные в численных экспериментах зависимости $K_d(D)$ были аппроксимирована моделью

$$K_d(D) = A - B_1 \left(1 - \exp\left(\frac{-D}{C_1}\right) \right) - B_2 \left(1 - \exp\left(\frac{-D}{C_2}\right) \right), \quad (8)$$

где A, B_1, B_2, C_1 и C_2 – параметры.

На рисунке 3 в полулогарифмическом масштабе приведены относительные погрешности аппроксимации формы глобального максимума АКФ (ГМ АКФ) для варианта а), где $\beta = R(\zeta)/R(0)$ – относительная амплитуда. Для б) и в) зависимости имели аналогичный вид, но с расширением диапазона аппроксимации относительная погрешность в целом возрастала.

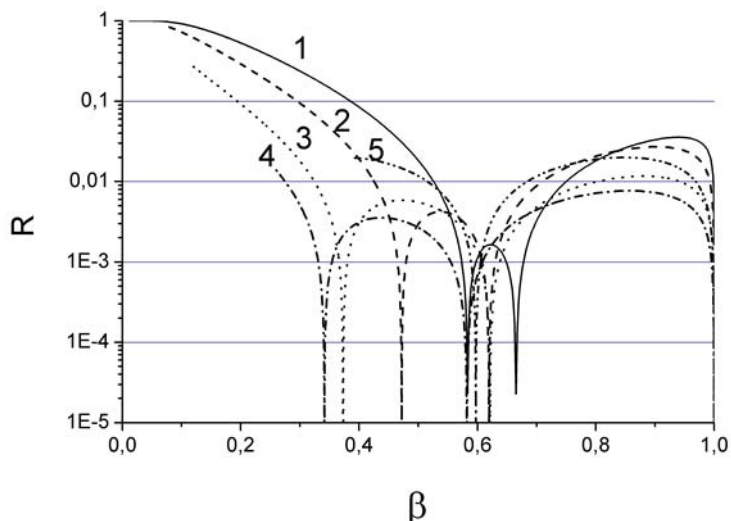


Рис. 3. Относительные погрешности аппроксимации формы ГМ АКФ при выборе диапазона аппроксимации из условия представления 99,5% энергии спектра применительно к $D=2$:
 1 – $D=0,5$; 2 – $D=1,0$; 3 – $D=1,5$; 4 – $D=2,5$; 5 – $D=4,0$

Заключение

Таким образом, применительно обработке схемой голографии Фурье изображений со степенными спектрами передаточная характеристика и автокорреляционная функция схемы могут быть остью аппроксимированы гауссово-подобной моделью. Экспоненциальные модели спектров характеризуются существенным по сравнению со степенными снижением удельного веса высокочастотных компонент, но на практике этот фактор в значительной степени нивелируется как низкочастотной фильтрацией в трактах ввода информации, так и нелинейностью экспозиционных характеристик голографических регистрирующих сред, ведущей к ограниченности частотного диапазона передаточной характеристики. В ряде случаев ограничение частотного диапазона необходимо уже из условий задачи, например, для обеспечения требуемого отношения сигнал/помеха при корреляционном сравнении изображений [12]. Подбор параметров модели аппроксимации позволяет оптимизировать модель для требуемого частотного диапазона.

Список источников

- [1] М.М. Мирошников. *Теоретические основы оптико-электронных приборов*. Л. Машиностроение. 1977. 600 с., с ил.
- [2] А.М. Яглом *Корреляционная теория стационарных случайных функций*. Л.: Гидрометеиздат, 1981. 280 С.
- [3] А.Е. Алтынов, В.В. Грузинов, И.В. Мишин. Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка, (1)2017, 34. URL: https://elibrary.ru/download/elibrary_28341894_68655679.pdf
- [4] А.М. Кулешов, Е.И. Шубников, С.А. Смаева. *Опт. и спектр.*, **60** (6), 1273 (1986). [A.M. Kuleshov, E.I. Shubnikov, S.A. Smaeva. *Opt. Spectr.*, **60** (6), 791 (1986).]
- [5] В.А. Барачевский. *Опт. и спектр.*, **124** (3), 371 (2018). [V.A. Barachevsky. *Opt. Spectr.*, **124** (3), 373 (2018).] DOI: 10.21883/OS.2018.03.45659.238-17

- [6] Л.П. Амосова, Н.И. Плетнева, А.Н. Чайка. Оптический журнал, **72**(6), 57 (2005). [Amosova, L.P., Pletneva, N.I., Chaika, A.N. Journal of Optical Technology, **72**(6), 469 (2005).] DOI: 10.1364/JOT.72.000469
- [7] Л.П. Амосова, А.Н. Чайка. Письма в ЖТФ, **33**(6), 57 (2007). URL: <https://journals.ioffe.ru/articles/viewPDF/11855> [Amosova, L.P., Chaika, A.N. Technical Physics Letters, **33**(6), 255 (2007).] DOI: 10.1134/S1063785007030200
- [8] Е.И. Шубников, А.М. Кулешов, Опт. и спектр., **55** (1), 161 (1983). [E.I. Shubnikov A.M. Kuleshov. Opt. Spectr., **55** (1), 94 (1983).]
- [9] А.М. Кулешов, Е.И. Шубников. Опт. и спектр., **60** (3), 606 (1986). [A.M. Kuleshov, E.I. Shubnikov. Opt. Spectr., **60** (3), 369 (1986).]
- [10] С.А. Александрина, А.М. Кулешов. Опт. и спектр., **68** (3), 652 (1990).
- [11] С.А. Шойдин, М.С. Ковалев. Опт. и спектр., **128** (7), 885 (2020). [S.A. Shoydin, M.S. Kovalev. Opt. Spectr., **128** (7), 885 (2020).] DOI: 10.21883/OS.2020.07.49557.108-20
- [12] Е.И. Шубников. Опт. и спектр., **62** (2), 450 (1987). [E.I. Shubnikov. Opt. Spectr., **62** (2), 268 (1987).]
- [13] А.В. Павлов. Опт. и спектр., **78** (1), 152 (1995). [Pavlov A.V. Opt. Spectr., **78** (1), 135 (1995).]
- [14] В.В. Орлов. Кв. электр., **47** (8), 773 (2017). [Orlov V.V. Quantum Elrctronics, **47** (8), 773 (2017).] DOI: 10.1070/QEL16337.
- [15] А.В. Павлов, В.В. Орлов. Кв. электр., **49** (3), 246 (2019). [Pavlov A.V., Orlov V.V. Quantum Elrctronics, **49** (3), 246 (2019).] DOI: 10.1070/QEL16748.
- [16] П.А. Ручка, Н.М. Вереникина, И.В. Гриценко, Е.Ю. Злоказов, М.С. Ковалев, Г.К. Красин, С.Б. Одинокоев, Н.Г. Сцепуро. Опт. и спектр., **127** (4), 563 (2019). [P. A. Ruchka, N. M. Verenikina, I. V. Gritsenko, E. Yu. Zlokazov, M. S. Kovalev, G. K. Krasin, S. B. Odinokov & N. G. Stsepuro Opt. Spectr., **127**, 618 (2019).] DOI: 10.21883/OS.2019.10.48358.172-19.
- [17] M.S. Kovalev, G.K. Krasin, S. B. Odinokov, A.B. Solomashenko, E.Yu. Zlokazov. Optics Express, **27** (2), 1563 (2019). DOI: 10.1364/OE.27.001563.
- [18] Е.Ю. Злоказов. Кв. электр., **50** (7), 643 (2020). [E.Yu. Zlokazov. Quantum Elrctronics, **50** (7), 643 (2020).]] DOI: 10.1070/QEL17291.
- [19] Н.Н. Евтихийев, Е.Ю. Злоказов, В.В. Краснов, В.Г. Родин, Р.С. Стариков, П.А. Черемхин. // Кв. электр., **50** (7), 667 (2020). [N.N. Evtikhiev, E.Yu. Zlokazov, V.V. Krasnov, V.G. Rodin, R.S. Starikov, P.A. Cherekhin. Quantum Electronics, **50** (7), 667 (2020)] DOI: 10.1070/QEL17295.
- [20] S. Rothe, P. Daferner, S. Heide, D. Krause, F. Schmieder, N. Koukourakis, J. W. Czarske. Optics Express, **29** (23), 37602 (2021). DOI: 10.1364/OE.434842.
- [21] Mager H.J., Wess O., Waidelich W. Opt. Comm., **9**(2), 156 (1973). DOI: 10.1016/0030-4018(73)90248-4.
- [22] А.В. Павлов. Компьютерная оптика, **44**(5), 728 (2020). DOI: 10.18287/2412-6179-CO-668.

Approximation of the transfer characteristic of the Fourier holography scheme

A. O. Gaugel, A. V. Pavlov

ITMO University, Saint Petersburg, Russia

Within the framework of the problem of analytical description of the response of the Fourier holography scheme, the possibility of approximating real transfer characteristics by Gaussian-like functions is shown. A model and estimates of approximation errors are given for processing images

with power-law spatial-frequency amplitude spectra for different recording conditions of holograms. The validity of the approach is confirmed by comparison with experimental data.

Keywords: Optics, Holography, Diffraction efficiency, Transfer function, System impulse response.