

# Апериодическая дифракционная решетка на основе распределения нулей $\zeta$ -функции Римана

А. Е. Мадисон<sup>1</sup>, П. А. Мадисон<sup>1,2</sup>, Д. А. Козодаев<sup>3</sup>, А. Н. Казанков<sup>3</sup>, В. А. Мошников<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», кампус в Санкт-Петербурге, Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup> Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина), Санкт-Петербург, Россия

<sup>3</sup> ООО «Активная Фотоника», Москва, Зеленоград, Россия

Проанализированы ряды Фурье по корням дзета-функции Римана и найдены точные количественные соотношения для положений и интенсивностей появляющихся в таких спектрах пиков. Обсуждается возможность создания апериодической дифракционной решетки, щели которой расположены в соответствии с распределением нетривиальных нулей дзета-функции Римана. Методами контактной атомно-силовой литографии создан действующий прототип такой апериодической решетки. Экспериментально получена картина дифракции, для которой положение дифракционных пиков соответствует простым числам и их степеням.

*Ключевые слова:* Апериодические кристаллы, Дзета-функция Римана, Дифракционные оптические элементы.

Цитирование: **Мадисон, А. Е.** Апериодическая дифракционная решетка на основе распределения нулей  $\zeta$ -функции Римана / А. Е. Мадисон, П. А. Мадисон, Д. А. Козодаев, А. Н. Казанков, В. А. Мошников // HOLOEXPO 2023: 20-я Международная конференция по голографии и прикладным оптическим технологиям : Тезисы докладов. — СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2023. — С. 69–73.

## Введение

Апериодический порядок широко используется в нанофотонике [1]. Его использование открывает новые перспективы в создании новых материалов с уникальными свойствами. В частности, одним из перспективных направлений использования апериодического порядка является создание материалов с эффектом оптического и акустического маскирования (так называемой «шапки-невидимки»), которые могут стать основой для создания материалов следующего поколения стелс-технологий [2].

Апериодические структуры могут характеризоваться необычными дифракционными свойствами. Для них не обязательно должно выполняться утверждение, что для когерентной интерференции лучей необходимо, чтобы на оптической разности хода укладывалось бы целое число длин волн. В частности, таким примером является созданная нами апериодическая дифракционная решетка, щели которой расположены в соответствии с распределением нетривиальных нулей  $\zeta$ -функции Римана.

Результаты представлены ниже.

## 1. Суммирование комплексных экспонент по нулям $\zeta$ -функции

### Римана

Дайсон предложил оригинальное и строгое с математической точки зрения определение квазикристалла [3]: «Квазикристалл – это распределение точечных масс, Фурье-образом которого является дискретным распределением частот». Также он обратил внимание на аналогию между распределением нулей  $\zeta$ -функции Римана и квазикристаллами. В частности, он отметил, что если гипотеза Римана верна, то нули  $\zeta$ -функции образуют одномерный квазикристалл по определению – они образуют одномерное распределение точек вдоль критической линии, а их спектр, как показал Одлышко [4], скорее всего, также представляет собой чисто дискретное распределение. Мазур и Стейн высказали предположение, что теоретическое обоснование наблюдаемого феномена могло бы быть получено при помощи явной формулы Вейля [5], но строгого доказательства в литературе нам найти не удалось.

Мы рассмотрели распределение  $\delta$ -функций Дирака по нулям  $\zeta$ -функции Римана и исследовали его Фурье-спектр [6]. Преобразование Фурье в таком случае сводится к суммированию комплексных экспонент по нулям  $\zeta$ -функции Римана:

$$S(t) = \sum \exp(i\gamma_k t),$$

где  $\gamma_k$  – нетривиальные нули  $\zeta$ -функции.

В результате теоретического анализа спектра  $\Re(S(t))$  и численного моделирования формы пиков нами было установлено, что в спектре присутствует непрерывная компонента, на фоне которой появляются острые пики. Все пики за исключением центрального имеют одинаковую форму, описываемую функцией кардинального синуса. Центральный пик описывается линейной комбинацией кардинального синуса и интегрального синуса, делённого на  $t$ . Пики расположены на логарифмах натуральных чисел  $t = \ln n$ , при этом их амплитуда определяется значениями функции фон Мангольдта  $\Lambda(n)$ .

Описанные выше закономерности могут быть использованы в качестве теоретической базы для создания интерференционных и дифракционных оптических элементов нового типа. Ранее в литературе обсуждалась принципиальная возможность конструирования некоего прибора, который предлагалось назвать интерферометром Римана [7]. Предлагалась конструкция, состоящая из специального набора точно позиционированных полупрозрачных зеркал или оптических расщепителей для воспроизведения положения нулей  $\zeta$ -функции, однако практическая реализации предложенной схемы представляется затруднительной.

Нами впервые получен оптический элемент, в основе функционирования которого лежит пространственное расположение корней  $\zeta$ -функции Римана.

## 2. Аперриодическая дифракционная решетка

Так как дифракционная картина по сути своей является Фурье-образом, то существует принципиальная возможность создания интерференционного прибора нового типа – дифракционной аперриодической решетки, щели которой расположены в соответствии с

распределением нетривиальных нулей  $\zeta$ -функции Римана. На поверхности прозрачной пластины требовалось создать аperiodическую систему прозрачных щелей, разделенных непрозрачными (шероховатыми) промежутками различной ширины. Позиции щелей должны были соответствовать значениям нулей  $\zeta$ -функции с некоторым масштабным коэффициентом. Тогда, согласно нашим оценкам, следовало ожидать появления необычной дифракционной картины с рефlekсами на логарифмах простых чисел и их степеней. Если число является составным, то рефлекс будет отсутствовать (будет происходить погасание рефлекса).

Угол дифракции определяется формулой:

$$(2\pi/\lambda) \cdot a \sin \varphi = m \ln p,$$

где  $\varphi$  — угол дифракции,  $\lambda$  — длина волны излучения (в частности, в наших экспериментах использовался лазерный диод с длиной волны  $\lambda = 0.633$  мкм),  $a$  — характерный масштабный множитель, в соответствии с которым значения корней  $\zeta$ -функции определяют позиции щелей (в наших экспериментах были изготовлены два варианта решеток с масштабными коэффициентами 1.0 и 0.8 мкм),  $p$  — простое число,  $m$  — степень простого числа (порядок рефлекса).

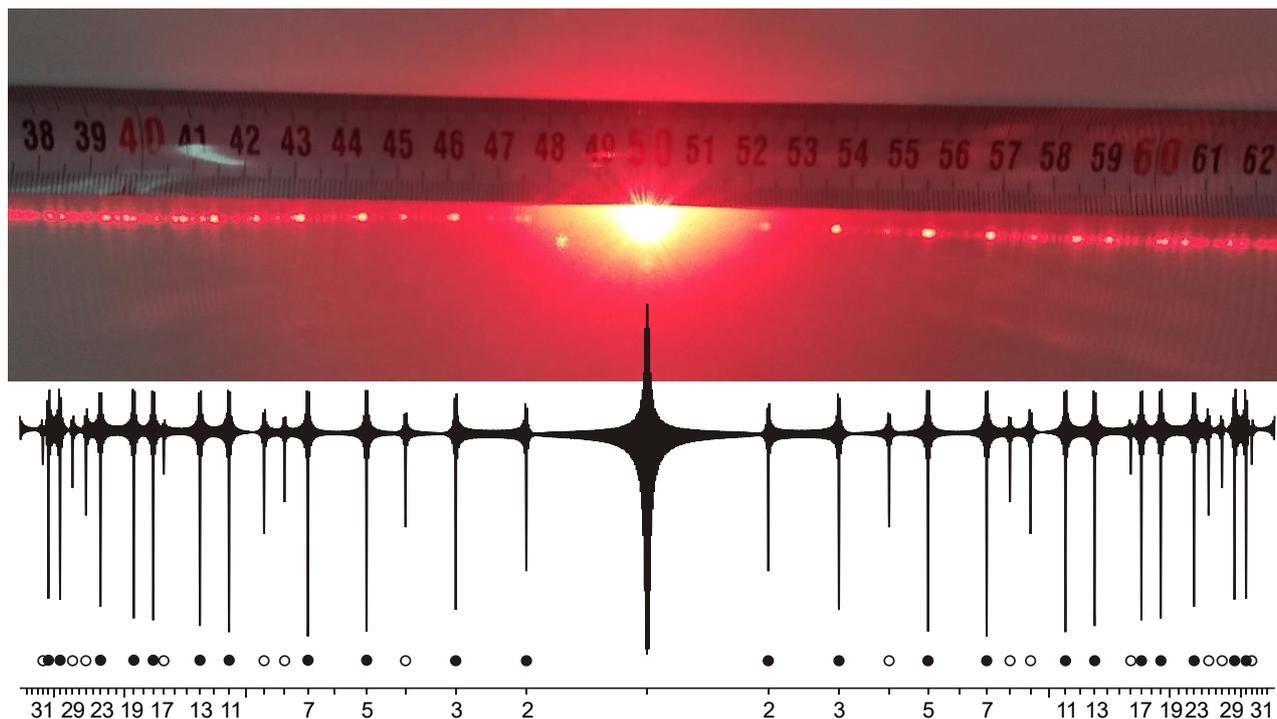
Интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды, при этом для амплитуды дифрагированного пучка справедливо выражение:

$$A_{\max} \propto n^{-1/2} \Lambda(n) = p^{-m/2} \ln p.$$

Прототипы аperiodических дифракционных решеток изготавливались методами контактной атомно-силовой литографии с использованием сканирующего зондового микроскопа NTEGRA, НТ-МДТ (Зеленоград). Было подготовлено несколько вариантов шаблонов и осуществлена отладка режимов силовой литографии на подложках из различных материалов. Средняя глубина рельефа варьировалась в итоге от 50 до 300 нм.

Наилучшие результаты были достигнуты для следующего варианта: сканирующий зондовый микроскоп NTEGRA с увеличенным полем сканирования  $150 \times 150$  мкм<sup>2</sup>, зонд алмазный монокристаллический DRPS-In; материал подложки — полиэтилентерефталат (SIQINZONGWA PET); шаблон: размер активной области —  $150 \times 150$  мкм<sup>2</sup>, масштабный множитель  $a = 0.8$  мкм, число щелей — 73, расчетная ширина отдельной щели — 0.8 мкм, шаг прохода «непрозрачных» областей — 0.3 мкм, число проходов прямолинейных участков шаблона — 3.

Экспериментальная картина дифракции для оптимального случая представлена на рис. 1 (расстояние от решетки до экрана было ~30 см). Ниже для сравнения представлен Фурье-спектр от соответствующим образом упорядоченной последовательности  $\delta$ -функций [6].



Сверху — картина дифракции (эксперимент); снизу — Фурье-спектр последовательности  $\delta$ -функций, упорядоченных в соответствии с распределением нетривиальных нулей  $\zeta$ -функции Римана (расчет); пики соответствуют простым числам и их степеням

**Рис. 1.** Дифракция на аperiodической решетке, щели которой расположены в соответствии с распределением нетривиальных нулей  $\zeta$ -функции Римана

Из сравнения экспериментальной дифракционной картины с расчетным Фурье-спектром видно, что, как и ожидалось, положения рефлексов действительно соответствуют простым числам. Незначительные отличия объясняются тем, что координаты рефлексов на плоском экране соответствуют тангенсу угла дифракции, а положения пиков Фурье-спектра — синусу угла дифракции.

Представленные на рис. 1 результаты наглядно иллюстрируют суть гипотезы Гильберта-Пойи, согласно которой нули  $\zeta$ -функции интерпретируются как спектр. Система  $\delta$ -функций, расположенных на нулях  $\zeta$ -функции, и система  $\delta$ -функций, расположенных на логарифмах простых чисел и их степеней, взаимно дуальны друг другу (в смысле прямого и обратного преобразований Фурье, с точностью до дополнительной непрерывной компоненты). Помимо этого, наши результаты также разрушают два прочно укоренившихся стереотипа. Во-первых, многие исследователи обычно полагают, что для когерентного сложения волн необходимо, чтобы на оптической разности хода укладывалось бы целое число длин волн. Для аperiodического порядка условие дифракции Брэгга может не выполняться. Второй стереотип связан с предположением, что появление простых чисел в ряду натуральных чисел является практически непредсказуемым и кажется абсолютно случайным. Однако мы видим, что простые числа естественным образом появляются в спектре некоторого весьма специфического дифракционного оптического элемента.

## Заключение

Исследована возможность создания апериодической дифракционной решетки, щели которой расположены в соответствии с распределением нетривиальных нулей дзета-функции Римана. Методами контактной атомно-силовой литографии создан действующий прототип такой апериодической решетки. Экспериментально получена картина дифракции, при этом положение дифракционных пиков соответствует простым числам и их степеням.

## Список источников

- [1] **Dal Negro, L.** Optics of aperiodic structures: Fundamentals and device applications / L. Dal Negro (ed.). — CRC Press, 2014. — 490 p.
- [2] **Boriskina, S. V.** Quasicrystals: Making invisible materials / S. V. Boriskina // Nature Photon. — 2015. — Vol 9. — P. 422–424.
- [3] **Dyson, F.** Birds and frogs / F. Dyson // Notices Amer. Math. Soc. — 2009. — Vol 56. — P. 212–223.
- [4] **Odlyzko, A. M.** Primes, quantum chaos, and computers / A. M. Odlyzko // Number theory: Proceedings of a symposium. Board on Mathematical Sciences, National Research Council. — 1990. — P. 35–46.
- [5] **Mazur, B.** Prime numbers and the Riemann hypothesis / B. Mazur, W. Stein. — Cambridge University Press, 2015. — 154 p.
- [6] **Madison, A. E.** Aperiodic crystals, Riemann zeta function, and primes / A. E. Madison, P. A. Madison, S. V. Kozyrev // Struct. Chem. — 2023. — Vol 34. — P. 777–790.
- [7] **Sierra, G.** The Riemann zeros as spectrum and the Riemann hypothesis / G. Sierra // Symmetry. — 2019. — Vol 11. — #494. — 37 p.

## Aperiodic diffraction grating based on the distribution of the Riemann zeros

*A. E. Madison<sup>1</sup>, P. A. Madison<sup>1,2</sup>, D. A. Kozodaev<sup>3</sup>, A. N. Kazankov<sup>3</sup>, V. A. Moshnikov<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> National Research University Higher School of Economics, Campus in Saint Petersburg, Saint Petersburg, Russia

<sup>2</sup> Saint Petersburg Electrotechnical University «LETI», Saint Petersburg, Russia

<sup>3</sup> Active Photonics LLC, Moscow, Zelenograd, Russia

Fourier series over Riemann zeta zeros are analyzed. Explicit formula for peak positions and intensities is derived. The possible formation of the aperiodic diffraction grating consisting of an array of slits, which are ordered according to the distribution of Riemann zeta zeros, is discussed. An actual prototype of such a grating is formed by using the atomic force microscopy nanolithography. The corresponding diffraction pattern is experimentally measured showing peaks positioned at primes and prime powers.

*Keywords:* Aperiodic crystals, Riemann zeta-function, Diffraction optical elements.