

# Градиентный метод расчета каскадных ДОЭ и его применение в задачах формирования световых пучков и классификации изображений

Л. Л. Досколович<sup>1,2</sup>, Д. В. Сошников<sup>1,2</sup>, Е. В. Бызов<sup>1,2</sup>, Г. А. Мотз<sup>1</sup>, Н. В. Головастиков<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королёва, Самара, Россия

<sup>2</sup> ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, Самара, Россия

Рассмотрен градиентный метод расчета каскадных дифракционных оптических элементов (ДОЭ), состоящих из нескольких последовательно расположенных фазовых ДОЭ. С использованием свойства унитарности оператора распространения света через каскадный ДОЭ получены выражения для производных функционала ошибки по фазовым функциям каскадного ДОЭ. Рассмотрено применение градиентного метода в задаче фокусировки различных падающих пучков в области с различными распределениями интенсивности и в задаче классификации изображений. Представленные описания градиентного метода рассматривают задачи синтеза каскадных ДОЭ для фокусировки лазерного излучения и для классификации изображений в рамках единого методологического подхода. Представлены примеры расчета каскадных ДОЭ для решения задач фокусировки и классификации рукописных цифр, демонстрирующие хорошие рабочие характеристики предложенного метода.

*Ключевые слова:* Дифракционный оптический элемент, Фазовая функция, Скалярная теория дифракции, Градиентный метод, Классификация изображений.

*Цитирование:* Досколович, Л. Л. Градиентный метод расчета каскадных ДОЭ и его применение в задачах формирования световых пучков и классификации изображений / Л. Л. Досколович, Д. В. Сошников, Е. В. Бызов, Г. А. Мотз, Н. В. Головастиков // HOLOEXPO 2023: 20-я Международная конференция по голографии и прикладным оптическим технологиям : Тезисы докладов. — СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2023. — С. 78–85.

## Введение

В настоящее время дифракционные оптические элементы (ДОЭ) являются предметом интенсивных исследований, поскольку они являются компактными, технологичными и позволяют эффективно решать широкий класс задач по преобразованию и фокусировке оптического излучения [1–5]. Задача расчета ДОЭ относится к классу обратных задач и заключается в нахождении фазовой функции ДОЭ, обеспечивающей формирование в заданной области пространства светового поля с заданными свойствами (чаще всего с заданным распределением интенсивности). Для расчета ДОЭ используются различные итерационные алгоритмы, например, алгоритм Гершберга-Сакстона и его модификации. В тоже время данные алгоритмы имеют ограниченную функциональность и не предназначены для решения задачи расчета каскадных ДОЭ, состоящих из нескольких последовательно расположенных фазовых ДОЭ.

В данной работе предложен градиентный метод расчета каскадных ДОЭ и в рамках единого подхода рассмотрено его применение в задачах формирования различных заданных

распределений интенсивности при различных падающих пучках и для задачи оптической классификации изображений [3, 5–9].

## 1. Постановка задачи

Пусть во входной плоскости  $z = f_0$  задана комплексная амплитуда «входного» поля  $w_0(\mathbf{u}_0)$ , где  $\mathbf{u}_0 = (u_0, v_0)$  — декартовы координаты в плоскости  $z = f_0$ . Данное поле с длиной волны  $\lambda$  последовательно распространяется через  $n$  ДОЭ с фазовыми функциями  $\varphi_m(\mathbf{u}_m)$ ,  $m = 1 \dots n$ , расположенных в плоскостях  $z = f_0 \dots f_n$ , где  $f_0 < f_1 < \dots < f_n$ , и далее попадает в «выходную» плоскость расположенную при  $z = f_{n+1}$ . Будем предполагать, что распространение света между плоскостями описывается в рамках приближения Френеля-Кирхгофа скалярной теории дифракции. Будем также считать, что прохождение света через ДОЭ описывается в приближении тонкого оптического элемента как умножение комплексной амплитуды падающего пучка на функцию комплексного пропуска ДОЭ  $T_m(\mathbf{u}_m) = \exp(i \times \varphi_m(\mathbf{u}_m))$ ,  $m = 1 \dots n$ . Таким образом, распространение поля через каскад ДОЭ будет описываться формулой:

$$w_{m+1}(\mathbf{u}_{m+1}) = \frac{e^{ikd_{m+1}}}{i\lambda d_{m+1}} \iint w_m(\mathbf{u}_m) T_m(\mathbf{u}_m) e^{i \frac{\pi}{\lambda d_m} (\mathbf{u}_{m+1} - \mathbf{u}_m)^2} d^2 \mathbf{u}_m, \quad m = 0 \dots n, \quad (1)$$

где  $w_m(\mathbf{u}_m)$  — комплексная амплитуда поля в плоскости  $z = f_m$ ,  $d_m = f_m - f_{m-1}$  — расстояние между плоскостями,  $T_0(\mathbf{u}_0) \equiv 1$ .

Под обратной задачей будем понимать задачу расчета фазовых функций из условия формирования в выходной плоскости поля с заданным распределением интенсивности  $I(\mathbf{u}_{n+1})$ . Будем считать, что ошибка формирования заданного распределения интенсивности представляется следующим интегральным критерием квадратичной ошибки:

$$\varepsilon(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \iint [I_{n+1}(\mathbf{u}_{n+1}) - I(\mathbf{u}_{n+1})]^2 d^2 \mathbf{u}_{n+1}, \quad (2)$$

где  $I(\mathbf{u}_{n+1}) = |w_{n+1}(\mathbf{u}_{n+1})|^2$  — распределение интенсивности в выходной плоскости.

Можно показать, что расчет производных функционала  $\varepsilon$  по фазовым функциям ДОЭ  $\varphi_m(\mathbf{u}_m)$ ,  $m = 1 \dots n$ , сводится к обратному распространению «поля ошибки» [10]:

$$F_{n+1}(\mathbf{u}_{n+1}) = w_{n+1}(\mathbf{u}_{n+1}) \times [I_{n+1}(\mathbf{u}_{n+1}) - I(\mathbf{u}_{n+1})]. \quad (3)$$

При этом, используя свойство унитарности оператора распространения света, производную функционала можно получить в виде [10]:

$$\frac{\partial \varepsilon(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial \varphi_m}(\mathbf{u}_m) = -2 \operatorname{Im} [w_m(\mathbf{u}_m) T_m(\mathbf{u}_m) F_m^*(\mathbf{u}_m)], \quad (4)$$

где функция  $F_m(\mathbf{u}_m)$  получена обратным распространением поля ошибки (3) из плоскости  $z = f_{n+1}$  в плоскость расположения  $m$ -го ДОЭ.

Полученные выражения для производных функционала (4) позволяют использовать для расчета каскадного ДОЭ градиентный метод. В рамках метода расчет фазовых функций осуществляется итерационно по следующей формуле:

$$\varphi_m^{k+1}(\mathbf{u}_m) = \varphi_m^k(\mathbf{u}_m) - t_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi_m}(\mathbf{u}_m), \quad m = 1 \dots n, \quad (5)$$

где  $k$  — номер итерации,  $t_k$  — шаг градиентного метода на  $k$ -ой итерации.

Рассмотренный градиентный метод можно легко обобщить на задачу формирования  $L$  заданных распределений интенсивности при  $L$  различных падающих пучках [10]. В этом случае в качестве функционала ошибки можно взять сумму функционалов вида (3), представляющих ошибки формирования заданных распределений интенсивности для различных падающих пучков. Вычисление производных такого функционала будет сводиться к вычислению производных функционалов для каждого пучка с использованием формулы (4).

## 2. Формирование заданных распределений интенсивностей

Пусть во входной плоскости каскадного ДОЭ заданы 4 входных распределения  $w_{0,j}(\mathbf{u}_0)$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , соответствующих гауссовым пучкам с радиусом по уровню спада  $1/e^2$   $2\sigma = 2,3$  мм и длиной волны  $\lambda = 0,532$  мкм, падающим на данную плоскость с различных направлений.

Будем считать, что вектора направлений пучков 1 и 2 лежат в плоскости  $u_0z$  и составляют углы  $\pm\theta = \pm 0,16^\circ$  с осью  $z$ , а вектора направлений пучков 3 и 4 лежат в плоскости  $v_0z$  и также составляют углы  $\pm\theta$  с осью  $z$ . Рассмотрим расчет каскадного ДОЭ, формирующего для описанных входных пучков требуемые распределения интенсивности в выходной плоскости  $z = 600$  мм. В качестве требуемых распределений интенсивностей были выбраны следующие изображения: окружность с диаметром 2,3 мм; контур квадрата с размерами стороны 2,3 мм; крест из двух отрезков со сторонами 2,3 мм; «повернутый крест» из двух отрезков, являющихся диагоналями квадрата со стороной 2,3 мм. Толщина линий у требуемых распределений составляет 0,2 мм.

Расчет будем производить для случаев одного ДОЭ (плоскость расположения  $z = f_1 = 300$  мм), двух ДОЭ (плоскости расположения  $z = f_1 = 200$  мм и  $z = f_2 = 400$  мм) и случая трех ДОЭ (плоскости расположения  $z = f_1 = 150$  мм,  $z = f_2 = 300$  мм и  $z = f_3 = 450$  мм). Фазовые функции в плоскостях расположения ДОЭ зададим на сетках  $512 \times 512$  с шагом  $d = 18$  мкм.

Расчет фазовых функций ДОЭ осуществлялся описанным выше градиентным методом. В качестве функционала ошибки использовалась сумма функционалов вида (2) для всех 4-х пучков. При расчете каждого из примеров было сделано 8000 итераций при экспоненциально убывающем шаге (такое число итераций оказалось достаточным для сходимости метода). В качестве начальных фаз использовались нулевые фазы.

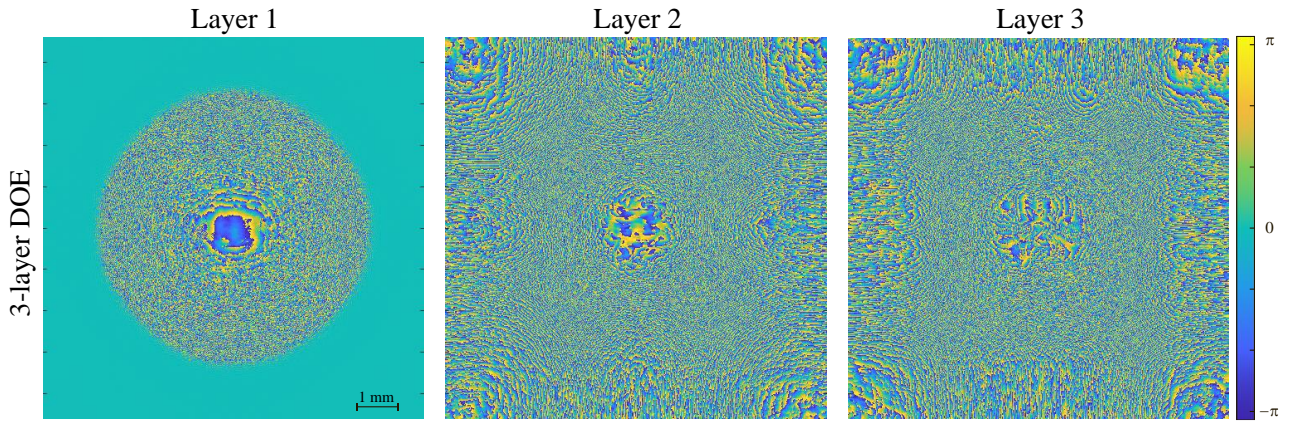


Рис. 1. Рассчитанные фазовые функции для каскада из трех ДОЭ

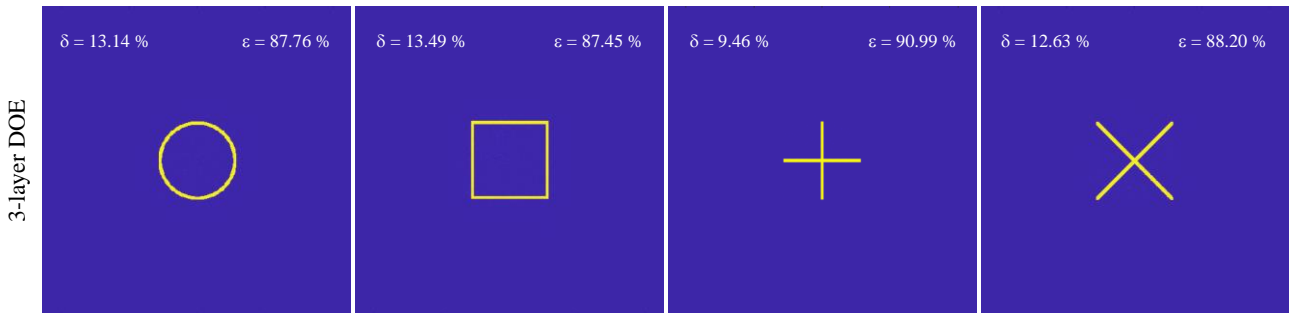


Рис. 2. Рассчитанные распределения интенсивности, формируемые каскадом из трех ДОЭ

В качестве примера на рис. 1 представлены рассчитанные фазовые функции для каскада из трех ДОЭ, а на рис. 2 — расчетные распределения интенсивности, формируемые каскадным ДОЭ при различных падающих пучках. Для характеристики качества формируемых распределений будем использовать значения энергетических эффективностей  $Eff_j$  и среднеквадратичных отклонений  $\delta_j$ . Значения энергетических эффективностей

$$Eff_j = \frac{1}{E_0} \iint_G I_{n+1}(\mathbf{u}_{n+1}) d^2 \mathbf{u}_{n+1}, \quad (6)$$

характеризуют долю энергии  $E_0 = \iint |w_0(\mathbf{u}_0)|^2 d^2 \mathbf{u}_0$  падающего пучка, попавшую в требуемую область  $G = \{\mathbf{u}_{n+1} | I(\mathbf{u}_{n+1}) \neq 0\}$ . Значения среднеквадратичных отклонений

$$\delta = \frac{1}{M} \sqrt{\iint_G [I_{n+1}(\mathbf{u}_{n+1}) - I(\mathbf{u}_{n+1})]^2 d^2 \mathbf{u}_{n+1}} \quad (7)$$

характеризуют среднеквадратическое отклонение (СКО) сформированного распределения для падающего пучка от требуемого распределения. Данные отклонения нормированы на средние значения  $M = \frac{1}{\|G\|} \iint_G I_{n+1}(\mathbf{u}_{n+1}) d^2 \mathbf{u}_{n+1}$ , где  $\|G\|$  — площадь области  $G$ .

**Таблица 1.** Энергетическая эффективность и среднеквадратичное отклонение для каскадов из одного, двух и трех ДОЭ, для различных изображений

Количество ДОЭ	Круг		Квадрат		Крест		Повернутый крест	
	Eff, %	$\delta$ , %	Eff, %	$\delta$ , %	Eff, %	$\delta$ , %	Eff, %	$\delta$ , %
1	49,10	77,14	46,50	81,75	53,65	66,95	53,99	67,83
2	74,71	29,88	75,32	29,06	82,77	19,14	78,50	24,79
3	87,76	13,14	13,49	13,49	90,99	9,46	88,20	12,63

В таблице 1 приведены значения энергетической эффективности и СКО для одного ДОЭ, каскада из двух ДОЭ и каскада из трех ДОЭ. Из таблицы 1 видно, что качество формируемых распределений улучшается с увеличением числа ДОЭ. Таким образом, представленные примеры показывают преимущества каскадных ДОЭ перед одиночными в задачах формирования заданных распределений интенсивности при нескольких падающих пучках и подтверждают хорошие рабочие характеристики метода.

### 3. Классификация изображений

В данном пункте мы рассмотрим расчет каскадного ДОЭ для решения задачи классификации на примере задачи классификации рукописных цифр из базы данных MNIST [11]. Для решения задачи в выходной плоскости ДОЭ были заданы 10 пространственно разделенных квадратных областей  $G_j$  с размером стороны 0,5 мм, в которых должны формироваться максимумы энергий для различных входных изображений различных цифр [3, 5]. При этом классификация цифр осуществляется следующим образом. Для каждого входного изображения цифры рассчитываются энергии  $E_j$ , формируемые каскадным ДОЭ в заданных областях, и затем выбирается область с максимальной энергией. Номер этой области и будет являться распознанной цифрой.

Сначала рассмотрим решение задачи с помощью одного ДОЭ. Для расчета были выбраны следующие параметры. Входные изображения цифр задавались на сетке из  $56 \times 56$  отсчетов с шагом  $d = 18$  мкм. Фазовая функция ДОЭ задавалась на сетке  $512 \times 512$  также с шагом  $d = 18$  мкм. Будем считать, что ДОЭ расположен в плоскости  $z = f_1 = 300$  мм, а выходная плоскость расположена при  $z = f_2 = 600$  мм.

При расчете ДОЭ использовалась «обучающая выборка», содержащая 60 000 изображений цифр из базы данных MNIST. Расчет ДОЭ проводился в идеологии нейронных сетей с обучением по батчу, каждый батч содержал 60 случайно выбранных цифр. В качестве начального приближения для фазы ДОЭ использовалась случайная фаза из интервала  $[0, 2\pi)$ .

В качестве функционала ошибки использовалась сумма функционалов, каждый из которых представлял ошибку распознавания одной цифры. Функционал ошибки для распознавания цифры «j» был задан в виде:

$$\varepsilon^j(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \sum_{k=1}^L (E_k - E_{\max} \delta_{k,j})^2, \quad (8)$$

где  $L = 10$  — количество классов (различных цифр),  $\delta_{k,j}$  — символ Кронекера,  $E_{\max}$  — максимально возможное значение энергии (можно взять всю энергию во входном пучке).

Для функционала (8) поле ошибки может быть получено в следующем виде [10]:

$$F_{n+1}(\mathbf{u}_{n+1}) = w_{n+1}(\mathbf{u}_{n+1}) \sum_{k=1}^L I_k(\mathbf{u}_{n+1}) [E_k - E_{\max} I_j(\mathbf{u}_{n+1})], \quad (9)$$

где  $I_j(\mathbf{u}_{n+1})$  — индикаторная функция, равная 1 в области  $G_j$  и 0 вне этой области. При этом расчет производных функционала (8) и, соответственно, общего функционала ошибки в виде суммы функционалов (8), осуществляется на основе формулы (4).

После расчета ДОЭ выполнялось «слепое» тестирование его работы на тестовой выборке, содержащей 10 000 изображений, которые не входили в обучающую выборку. Для рассчитанного ДОЭ точность распознавания цифр варьируется в диапазоне от 93,9 % для цифры «9» до 99,2 % для цифры «1». При этом «общая точность распознавания» (т.е. отношение правильно распознанных цифр к общему числу цифр в тестовой выборке) составляет 97,2 %.

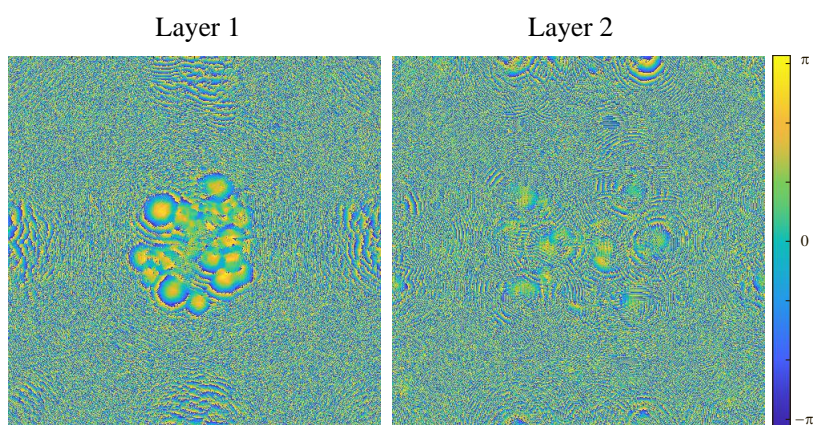


Рис. 3. Фазовые функции каскадного ДОЭ

Accuracy = 97.90%

98.6	0.0	0.1	0.0	0.1	0.2	0.4	0.0	0.3	0.2
0.0	99.6	0.2	0.0	0.0	0.0	0.3	0.3	0.1	0.4
0.1	0.2	98.9	0.9	0.3	0.2	0.0	0.9	0.5	0.2
0.1	0.1	0.4	97.2	0.0	0.6	0.1	0.3	0.8	0.5
0.1	0.0	0.1	0.0	97.6	0.0	0.4	0.0	0.7	0.7
0.4	0.0	0.0	0.9	0.0	98.7	0.6	0.0	0.6	0.4
0.3	0.1	0.0	0.0	0.4	0.2	98.1	0.0	0.4	0.2
0.1	0.0	0.2	0.3	0.1	0.1	0.0	98.0	0.6	0.3
0.3	0.0	0.1	0.3	0.2	0.0	0.0	0.1	95.2	0.2
0.0	0.0	0.0	0.4	1.3	0.0	0.0	0.5	0.7	96.9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

True Labels

Predicted Labels

Рис. 4. Матрица ошибок для каскада из 2-х ДОЭ

Далее был рассчитан каскадный ДОЭ, состоящий из двух ДОЭ, расположенных в плоскостях  $z = f_1 = 300$  мм и  $z = f_2 = 600$  мм (рис. 3). Выходная плоскость была расположена при  $z = 900$  мм. Все остальные параметры (дискретизация, длина волны, размеры апертур) совпадают с параметрами рассмотренного выше примера. Матрица ошибок рассчитанного каскадного представлена ДОЭ на рис. 4. Общая точность распознавания для каскада из двух ДОЭ составляет 97,9 %. Таким образом, увеличение общей точности распознавания при переходе от одного ДОЭ к каскаду из двух ДОЭ составило 0,7 %. Отметим, что дальнейшее увеличение числа ДОЭ фактически не увеличивает точность распознавания.

### Заключение

С использованием предложенного градиентного метода рассчитаны одиночные и каскадные ДОЭ для решения задачи фокусировки различных падающих пучков в различные области и задачи классификации рукописных цифр. Представленные результаты численного моделирования демонстрируют хорошие рабочие характеристики предложенного метода. В частности, показано, что одиночный ДОЭ позволяет решить задачу классификации с точностью около 97 %, а каскад из двух ДОЭ — с точностью около 98 %.

### Благодарность

Работа выполнена при поддержке Государственного задания ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН в части разработки градиентного метода расчета каскадных ДОЭ и Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (государственное задание Самарскому университету, лаборатория «Фотоника для умного дома и умного города», проект FSSS-2021-0016) в части расчета ДОЭ для задач фокусировки и классификации изображений рукописных цифр.

### Список источников

- [1] **Zhang, J.** 3D computer-generated holography by non-convex optimization / J. Zhang, N. Pégard, J. Zhong, H. Adesnik, L. Waller // *Optica*. — 2017. — Vol 4. — № 4. — P. 1306–1313.
- [2] **Wang, H.** Dynamic 2D implementation of 3D diffractive optics / H. Wang, R. Piestun // *Optica*. — 2018. — Vol 5. — № 10. — P. 1220–1228.
- [3] **Lin, X.** All-optical machine learning using diffractive deep neural networks / X. Lin, Y. Rivenson, N. T. Yardimci, M. Veli, Y. Luo, M. Jarrahi, A. Ozcan // *Science*. — 2018. — Vol 361. — № 6406. — P. 1004–1008.
- [4] **Schmidt, S.** Tailored micro-optical freeform holograms for integrated complex beam shaping / S. Schmidt, S. Thiele, A. Toulouse, C. Bösel, T. Tiess, A. Herkommer, H. Gross, H. Giessen // *Optica*. — 2020. — Vol 7. — № 10. — P. 1279–1286.
- [5] **Zhou, T.** In situ optical backpropagation training of diffractive optical neural networks / T. Zhou, L. Fang, T. Yan, J. Wu, Y. Li, J. Fan, H. Wu, X. Lin, Q. Dai // *Photonics Research*. — 2020. — Vol 8. — № 6. — P. 940–953.
- [6] **Yan, T.** Fourier-space Diffractive Deep Neural Network / T. Yan, J. Wu, T. Zhou, H. Xie, F. Xu, J. Fan, L. Fang, X. Lin, Q. Dai // *Physical Review Letters*. — 2019. — Vol 123. — № 2. — P. 023901.
- [7] **Zheng, S.** Orthogonality of diffractive deep neural network / S. Zheng, S. Xu, D. Fan // *Optics Letters*. — 2022. — Vol 47. — № 7. — P. 1798–1801.

- [8] **Chang, J.** Hybrid optical-electronic convolutional neural networks with optimized diffractive optics for image classification / J. Chang, V. Sitzmann, X. Dun, W. Heidrich, G. Wetzstein // *Scientific Reports*. — 2018. — Vol 8. — № 1. — P. 12324.
- [9] **Liu, C.** A programmable diffractive deep neural network based on a digital-coding metasurface array / C. Liu, Q. Ma, Z. J. Luo, Q. R. Hong, Q. Xiao, H. C. Zhang, L. Miao, W. M. Yu, Q. Cheng, L. Li, T. J. Cui // *Nature Electronics*. — 2022. — Vol 5. — P. 113–122.
- [10] **Soshnikov, D. V.** Design of Cascaded Diffractive Optical Elements for Optical Beam Shaping and Image Classification Using a Gradient Method / D. V. Soshnikov, L. L. Doskolovich, G. A. Motz, E. V. Byzov, E. A. Bezus, D. A. Bykov, A. A. Mingazov // *Photonics*. — 2023. — Vol 10. — № 7.
- [11] **Lecun, Y.** GradientBased Learning Applied to Document Recognition / Y. Lecun, L. Bottou, Y. Bengio, P. Haffner // *Proceedings of the IEEE*. — 1998. — Vol 86. — № 11. — P. 2278–2324.

## **Gradient method for designing cascaded DOEs and its application in the problems of optical beam shaping and image classification**

*L. L. Doskolovich<sup>1,2</sup>, D. V. Soshnikov<sup>1,2</sup>, E. V. Byzov<sup>1,2</sup>, G. A. Motz<sup>1</sup>, N. V. Golovasticov<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup> Samara National Research University, Samara, Russia

<sup>2</sup> Image Processing Systems Institute of the RAS — Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” of the RAS, Samara, Russia

We present a gradient method for designing cascaded diffractive optical elements (DOEs) consisting of several sequentially located phase DOEs. Using the unitarity property of the operator of light propagation through the cascaded DOE, we obtain explicit expressions for the derivatives of the error functional with respect to the phase functions of the cascaded DOE. We consider the application of the gradient method to the problem of focusing different incident beams to regions with different intensity distributions and to the problem of image classification. The presented description of the gradient method treats the problems of designing cascaded DOEs for focusing laser radiation and for image classification within a unified approach. We present examples of the calculation of cascaded DOEs for focusing different incident beams to different regions and for classifying handwritten digits, which demonstrate high performance of the proposed method.

*Keywords:* Diffractive optical element, Phase function, Scalar diffraction theory, Gradient method, Image classification.