

# Оптическое дифференцирование второго порядка трехмерного светового пучка с использованием слоистой металлодиэлектрической структуры

Л. Л. Досколович<sup>1,2</sup>, А. И. Кашапов<sup>1,2</sup>, Е. А. Безус<sup>1,2</sup>, Н. В. Головастиков<sup>1,2</sup>, Д. А. Быков<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, Самара, Россия

<sup>2</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва, Самара, Россия

Исследуется оптическая реализация операции дифференцирования второго порядка с помощью слоистой металлодиэлектрической структуры в геометрии наклонного падения. Показано, что преобразование профиля трехмерного светового пучка, происходящее при его отражении от слоистой структуры, может быть описано в рамках теории линейных систем. Получена передаточная функция данной линейной системы и показано, что если слоистая структура обладает нулем отражения второго порядка по пространственной частоте для одной из поляризаций, то реализуемое ей преобразование соответствует взвешенной сумме вторых производных по пространственным координатам от профиля падающего пучка. С использованием представленного теоретического описания рассчитана слоистая металлодиэлектрическая структура для вычисления оператора Лапласа от профиля трехмерного линейно-поляризованного светового пучка. Представленные результаты численного моделирования демонстрируют вычисление указанного оператора с высоким качеством.

*Ключевые слова:* Оптическое дифференцирование, Вторая производная, Оператор Лапласа, Слоистая структура, Передаточная функция.

*Цитирование:* Досколович, Л. Л. Оптическое дифференцирование второго порядка трехмерного светового пучка с использованием слоистой металлодиэлектрической структуры / Л. Л. Досколович, А. И. Кашапов, Е. А. Безус, Н. В. Головастиков, Д. А. Быков // HOLOEXPO 2023: 20-я Международная конференция по голографии и прикладным оптическим технологиям : Тезисы докладов. — СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2023. — С. 59–68.

## Введение

В последние годы наблюдается большой интерес к разработке структур нанофотоники для оптической обработки информации и аналоговых оптических вычислений. Указанные структуры рассматриваются в качестве перспективной элементной базы, призванной обеспечить дальнейшее развитие вычислительных систем [1, 2]. Одними из наиболее важных операций аналоговых оптических вычислений являются операции дифференцирования оптического сигнала во времени и по пространственной координате. Для оптической реализации данных операций были предложены различные резонансные структуры фотоники, в частности, резонансные дифракционные решетки [2–6] и слоистые структуры [7–9]. Использование для дифференцирования именно резонансных структур связано с тем, что получение требуемого для дифференцирования нуля в спектре дифракционной структуры, обусловлено, как правило, резонансными эффектами возбуждения её собственных мод.

Несмотря на большое количество работ по оптическому дифференцированию, существует всего несколько работ, посвященных оптическому дифференцированию второго порядка [11–14]. Под дифференцированием второго порядка мы будем понимать дифференциальный оператор, соответствующий взвешенной сумме вторых производных по пространственным координатам. Важным частным случаем данного оператора является оператор Лапласа. Оптическая реализация данного оператора представляет большой интерес для различных задач обработки изображений, а также для аналогового решения уравнений математической физики.

Для оптической реализации оператора дифференцирования второго порядка требуются дифракционные структуры, имеющие нули второго порядка по пространственным частотам (тангенциальным компонентам волнового вектора) в спектре отражения или пропускания. Наиболее просто выполнение данного условия достигается в геометрии нормального падения, для которой нули второго порядка обеспечиваются симметрией задачи дифракции [11]. В частности, такой подход использовался в работах [2, 11–14] для оптической реализации операции дифференцирования второго порядка с помощью слоистых дифракционных структур (в отражении) [11, 12] и с помощью дифракционных решеток (ДР) с двумерной периодичностью (в пропускании) [2, 13, 14]. С одной стороны, слоистые структуры существенно проще ДР с точки зрения их технологической реализации. С другой стороны, недостатком таких структур является тот факт, что они работают в режиме отражения при нормальном падении. Это усложняет применение таких слоистых структур в практических задачах и требует использования в оптической схеме дополнительных оптических элементов.

В настоящей работе для оптической реализации операции дифференцирования второго порядка предлагается слоистая металлодиэлектрическая структура, состоящая из двух трехслойных структур «металл-диэлектрик-металл». Предлагаемая структура реализует данную операцию в отражении, но, в отличие от ранее рассмотренных слоистых структур [11, 12], работает в геометрии наклонного падения, и, таким образом, не требует дополнительных оптических элементов при практической реализации. В работе получена ПФ, описывающая преобразование профиля трехмерного светового пучка, происходящее при его отражении от слоистой структуры при наклонном падении. На основе рассмотренного теоретического описания рассчитана слоистая структура для вычисления оператора Лапласа. Представленные результаты численного моделирования рассчитанной структуры подтверждают корректность предложенного теоретического описания и демонстрируют вычисление оператора Лапласа с высоким качеством.

## **1. Описание дифракции трехмерного пучка на слоистой структуре при наклонном падении**

Рассмотрим световой пучок, падающий на слоистую структуру под углом  $\theta$  (рис. 1). Для описания дифракции пучка на слоистой структуре будет удобно задать падающий пучок в

локальной системе координат  $\mathbf{r}_{\text{inc}} = (x_{\text{inc}}, y_{\text{inc}}, z_{\text{inc}})$ , связанной с падающим пучком и повернутой на угол  $\theta$  относительно оси  $y$  глобальной системы координат  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  (рис. 1). Для представления падающего пучка будем использовать базис плоских волн, имеющих в глобальной системе координат ТМ- и ТЕ-поляризацию (от англ. transverse magnetic и transverse electric) [15]. У ТМ-волн вектор магнитного поля перпендикулярен плоскости падения, содержащей волновой вектор и ось  $z$ , а вектор электрического поля лежит в данной плоскости. У ТЕ-волн вектор электрического поля перпендикулярен плоскости падения, а вектор магнитного поля лежит в данной плоскости.

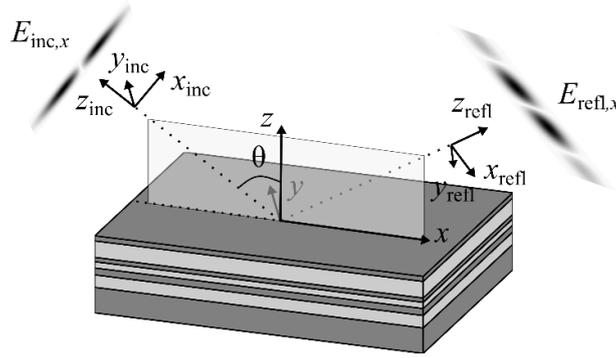


Рис. 1. Геометрия задачи дифракции трехмерного пучка на слоистой структуре

Представим падающий пучок в системе координат  $\mathbf{r}_{\text{inc}} = (x_{\text{inc}}, y_{\text{inc}}, z_{\text{inc}})$ , в виде векторной суперпозиции плоских волн различных направлений (с различными тангенциальными компонентами волновых векторов  $\mathbf{k}_{\perp, \text{inc}} = (k_{x, \text{inc}}, k_{y, \text{inc}})$  с ТМ- и ТЕ-поляризацией:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\text{inc}}(\mathbf{r}_{\text{inc}}) &= [\mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{r}_{\text{inc}}), \mathbf{H}_{\text{inc}}(\mathbf{r}_{\text{inc}})]^T = \\ &= \iint G_{\text{TE}}(\mathbf{k}_{\perp, \text{inc}}) \Phi_{\text{TE}}(\mathbf{k}_{\perp, \text{inc}}) \exp\left(i\mathbf{k}_{\perp, \text{inc}}\mathbf{r}_{\perp, \text{inc}} - iz_{\text{inc}}\sqrt{k_0^2 \varepsilon_{\text{sup}} - k_{\perp, \text{inc}}^2}\right) d\mathbf{k}_{\perp, \text{inc}} + \\ &+ \iint G_{\text{TM}}(\mathbf{k}_{\perp, \text{inc}}, \omega) \Phi_{\text{TM}}(\mathbf{k}_{\perp, \text{inc}}) \exp\left(i\mathbf{k}_{\perp, \text{inc}}\mathbf{r}_{\perp, \text{inc}} - iz_{\text{inc}}\sqrt{k_0^2 \varepsilon_{\text{sup}} - k_{\perp, \text{inc}}^2}\right) d\mathbf{k}_{\perp, \text{inc}}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mathbf{r}_{\perp, \text{inc}} = (x_{\text{inc}}, y_{\text{inc}})$ ,  $\mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{r}_{\text{inc}})$ ,  $\mathbf{H}_{\text{inc}}(\mathbf{r}_{\text{inc}})$  — векторы электрического и магнитного поля падающего пучка,  $\Phi_{\text{TE}}(\mathbf{k}_{\perp, \text{inc}})$ ,  $\Phi_{\text{TM}}(\mathbf{k}_{\perp, \text{inc}})$  — векторы из компонент электрического и магнитного поля плоских волн, имеющих ТМ и ТЕ-поляризацию в глобальной системе координат,  $G_{\text{TE}}(\mathbf{k}_{\perp, \text{inc}})$  и  $G_{\text{TM}}(\mathbf{k}_{\perp, \text{inc}})$  — спектры ТЕ- и ТМ-компонент падающего пучка, представляющие амплитуды ТЕ- и ТМ-волн, образующих пучок,  $k_0 = 2\pi/\lambda$  — волновое число,  $\lambda$  — длина волны,  $\varepsilon_{\text{sup}}$  — диэлектрическая проницаемость среды. Выражения для векторов  $\Phi_{\text{TE}}(\mathbf{k}_{\perp, \text{inc}})$ ,  $\Phi_{\text{TM}}(\mathbf{k}_{\perp, \text{inc}})$  в (1) несложно получить из уравнений Максвелла в виде [15]:

$$\Phi_{\text{TM}}(\mathbf{k}_{\perp, \text{inc}}) = [\mathbf{E}_{\text{TM, inc}}, \mathbf{H}_{\text{TM, inc}}]^T = \frac{1}{|\mathbf{k}_{\perp}|} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \varepsilon_{\text{sup}} \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix}, \quad \Phi_{\text{TE}}(\mathbf{k}_{\perp, \text{inc}}) = [\mathbf{E}_{\text{TE, inc}}, \mathbf{H}_{\text{TE, inc}}]^T = \frac{1}{|\mathbf{k}_{\perp}|} \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\text{где } |\mathbf{k}_{\perp}| = \sqrt{k_{y, \text{inc}}^2 + (k_{x, \text{inc}}^2 \cos^2 \theta - k_{z, \text{inc}}^2 \sin^2 \theta)^2}, \quad k_{z, \text{inc}} = -\sqrt{k_0^2 \varepsilon_{\text{sup}} + \mathbf{k}_{\perp, \text{inc}}^2},$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} -k_{x,\text{inc}}k_{z,\text{inc}} \cos \theta + (k_{y,\text{inc}}^2 + k_{z,\text{inc}}^2) \sin \theta \\ -k_{y,\text{inc}}(k_{z,\text{inc}} \cos \theta + k_{x,\text{inc}} \sin \theta) \\ (k_{y,\text{inc}}^2 + k_{z,\text{inc}}^2) \cos \theta - k_{x,\text{inc}}k_{z,\text{inc}} \sin \theta \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} -k_0k_{y,\text{inc}} \cos \theta \\ k_0(-k_{x,\text{inc}} \cos \theta + k_{z,\text{inc}} \sin \theta) \\ k_0k_{y,\text{inc}} \sin \theta \end{bmatrix}, \quad (3)$$

За счет выбора спектров  $G_{\text{TE}}(\mathbf{k}_{\perp,\text{inc}})$  и  $G_{\text{TM}}(\mathbf{k}_{\perp,\text{inc}})$  можно задать две требуемые компоненты электромагнитного поля. Предположим, что в плоскости  $z_{\text{inc}} = 0$  падающий пучок является линейно поляризованным по оси  $x_{\text{inc}}$ , так что  $E_{\text{inc},y}(\mathbf{r}_{\perp,\text{inc}}, 0) \equiv 0$ . Будем считать, что  $x$ -компонента электрического поля при  $z_{\text{inc}} = 0$  является заданной и имеет вид

$$E_{\text{inc},x}(\mathbf{r}_{\perp,\text{inc}}, 0) = \iint G_x(\mathbf{k}_{\perp,\text{inc}}) \exp(i\mathbf{k}_{\perp,\text{inc}}\mathbf{r}_{\perp,\text{inc}}) d\mathbf{k}_{\perp,\text{inc}}, \quad (4)$$

Где  $G_x(\mathbf{k}_{\perp,\text{inc}})$  – спектр  $x$ -компоненты электрического поля. В этом случае спектры  $G_{\text{TE}}(\mathbf{k}_{\perp})$ ,  $G_{\text{TM}}(\mathbf{k}_{\perp})$  могут быть получены из (1)-(3) в виде [15]:

$$G_{\text{TM}}(\mathbf{k}_{\perp,\text{inc}}) = g_{\text{TM}}(\mathbf{k}_{\perp,\text{inc}})G_x(\mathbf{k}_{\perp,\text{inc}}), \quad G_{\text{TE}}(\mathbf{k}_{\perp,\text{inc}}) = g_{\text{TE}}(\mathbf{k}_{\perp,\text{inc}})G_x(\mathbf{k}_{\perp,\text{inc}}), \quad (5)$$

где

$$g_{\text{TM}}(\mathbf{k}_{\perp,\text{inc}}) = \frac{k_{x,\text{inc}} \cos \theta - k_{z,\text{inc}} \sin \theta}{k_{z,\text{inc}} \sqrt{k_{y,\text{inc}}^2 + (k_{x,\text{inc}} \cos \theta - k_{z,\text{inc}} \sin \theta)^2}}, \quad (6)$$

$$g_{\text{TE}}(\mathbf{k}_{\perp,\text{inc}}) = \frac{k_{y,\text{inc}}(k_{z,\text{inc}} \cos \theta + k_{x,\text{inc}} \sin \theta)}{k_0k_{z,\text{inc}} \sqrt{k_{y,\text{inc}}^2 + (k_{x,\text{inc}} \cos \theta - k_{z,\text{inc}} \sin \theta)^2}},$$

При выбранных спектрах (5)  $E_{\text{inc},y}(\mathbf{r}_{\perp,\text{inc}}, 0) \equiv 0$  и  $x$ -компонента, задаваемая формулой (4), является основной компонентой электрического поля падающего пучка. Поэтому далее мы будем рассматривать преобразование только  $x$ -компоненты электрического поля, происходящее при отражении пучка от слоистой структуры.

При отражении падающего пучка от слоистой структуры амплитуды ТМ- и ТЕ-волн, составляющих пучок, умножаются на коэффициенты отражения  $R_{\text{TM}}(\mathbf{k}_{\perp})$ ,  $R_{\text{TE}}(\mathbf{k}_{\perp})$ , где  $\mathbf{k}_{\perp} = (k_x, k_y)$  – тангенциальные компоненты волнового вектора падающей плоской волны в глобальной системе координат

$$\mathbf{k}_{\perp} = \mathbf{k}_{\perp}(\mathbf{k}_{\perp,\text{inc}}) = \left( k_{x,\text{inc}} \cos \theta + \sin \theta \sqrt{k_0^2 \varepsilon_{\text{sup}} - k_{x,\text{inc}}^2 - k_{y,\text{inc}}^2}, k_{y,\text{inc}} \right) \quad (7)$$

В системе координат отраженного пучка  $\mathbf{r}_{\text{refl}} = (\mathbf{r}_{\perp,\text{refl}}, z_{\text{refl}})$ , где  $\mathbf{r}_{\perp,\text{refl}} = (x_{\text{refl}}, y_{\text{refl}})$ , тангенциальные компоненты  $\mathbf{k}_{\perp,\text{inc}}$  волновых векторов падающих волн не изменяются при отражении, а компонента  $k_{z,\text{inc}}$  меняет знак, поскольку отраженный пучок распространяется по оси  $z_{\text{refl}}$ . Таким образом, с учетом (1), (5),  $x$ -компонента электрического поля отраженного пучка (в системе координат  $\mathbf{r}_{\text{refl}} = (\mathbf{r}_{\perp,\text{refl}}, z_{\text{refl}})$ ) будет иметь вид

$$E_{\text{refl},x}(\mathbf{r}_{\text{refl}}) = \iint G_x(\mathbf{k}_{\perp,\text{inc}}) H(\mathbf{k}_{\perp,\text{inc}}) \exp\left(i\mathbf{k}_{\perp,\text{inc}}\mathbf{r}_{\perp,\text{refl}} + iz_{\text{refl}} \sqrt{k_0^2 \varepsilon_{\text{sup}} - k_{\perp,\text{inc}}^2}\right) d\mathbf{k}_{\perp,\text{inc}} \quad (8)$$

где

$$H(\mathbf{k}_{\perp,\text{inc}}) = g_{\text{TM}}(\mathbf{k}_{\perp,\text{inc}})\Phi_{\text{TM},1}(\mathbf{k}_{\perp,\text{inc}})R_{\text{TM}}(\mathbf{k}_{\perp}(\mathbf{k}_{\perp,\text{inc}})) + g_{\text{TE}}(\mathbf{k}_{\perp,\text{inc}})\Phi_{\text{TE},1}(\mathbf{k}_{\perp,\text{inc}})R_{\text{TE}}(\mathbf{k}_{\perp}(\mathbf{k}_{\perp,\text{inc}})) \quad (9)$$

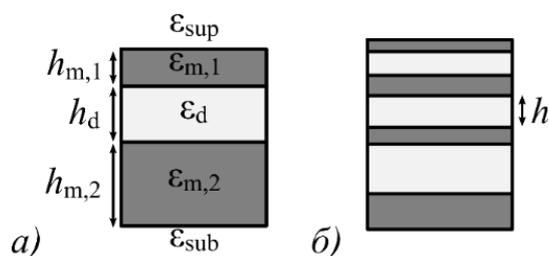
Здесь функции  $g_{\text{TM}}(\mathbf{k}_{\perp,\text{inc}})$ ,  $g_{\text{TE}}(\mathbf{k}_{\perp,\text{inc}})$  заданы уравнением (6), а  $\Phi_{\text{TM},1}$ ,  $\Phi_{\text{TE},1}$  являются первыми компонентами векторов  $\Phi_{\text{TE}}$ ,  $\Phi_{\text{TM}}$  в (2) при  $k_{z,\text{inc}} = +\sqrt{k_0^2 \varepsilon_{\text{sup}} - k_{\perp,\text{inc}}^2}$ .

Из формул (1), (8), (9) следует, что преобразование  $x$ -компоненты электрического поля падающего пучка  $E_{inc,x}(\mathbf{r}_{\perp,inc}, 0) \rightarrow E_{refl,x}(\mathbf{r}_{\perp,refl}, 0)$ , происходящее при его отражении, соответствует преобразованию «сигнала»  $E_{inc,x}(\mathbf{r}_{\perp,inc}, 0)$  линейной системой с передаточной функцией (ПФ)  $H(\mathbf{k}_{\perp,inc})$ , заданной формулой (9).

## 2. Исследуемая металлодиэлектрическая слоистая структура с нулем отражения второго порядка

Рассмотренная выше модель дифракции будет далее использована для описания преобразования светового пучка, происходящего при отражении от слоистой металлодиэлектрической структуры, имеющей нуль отражения второго порядка и состоящей из двух последовательно расположенных трехслойных структур «металл-диэлектрик-металл» (МДМ).

Рассмотрим сначала одиночную структуру МДМ-структуру (рис. 2а), состоящую из верхнего металлического слоя (толщина  $h_{m,1}$ , диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_{m,1}$ ), диэлектрического слоя (толщина  $h_d$ , диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_d$ ) и нижнего металлического слоя (толщина  $h_{m,2}$ , диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_{m,2}$ ). Диэлектрические проницаемости материалов над и под структурой равны  $\epsilon_{sup}$  и  $\epsilon_{sub}$  соответственно.



**Рис. 2.** Геометрия МДМ-структур: а) одиночной структуры и б) двойной структуры, состоящей из двух одиночных МДМ-структур, разделенных диэлектрическим слоем с толщиной  $h$

Пусть на структуру наклонно падает плоская волна с некоторой поляризацией (ТМ- или ТЕ-) и тангенциальными компонентами волнового вектора  $k_{x,0} = k_0 \sqrt{\epsilon_{sup}} \sin \theta$ ,  $k_y = 0$ , где  $\theta$  — угол падения. Отметим, что рассматриваемая МДМ-структура является резонансной, поскольку в ней могут существовать вытекающие моды, локализованные в диэлектрическом слое. Благодаря формированию резонанса Фабри–Перо коэффициент отражения структуры может обращаться в нуль. Более того, в [8, 9] показано, что при заданных материалах (значениях  $\epsilon_{m,1}$ ,  $\epsilon_{m,2}$ ,  $\epsilon_d$ ), длине волны и угле падения (или тангенциальной компоненте волнового вектора  $k_{x,0}$ ) в МДМ-структуре всегда можно получить нулевое отражение за счет выбора толщин  $h_{m,1}$ ,  $h_{m,2}$ ,  $h_d$  образующих её слоев.

Далее рассмотрим двойную МДМ-структуру (рис. 2б), состоящую из двух различных одиночных МДМ-структур, имеющих нули отражения при  $k_x = k_{x,0}$  (при угле падения  $\theta$ ). В

этом случае коэффициенты отражения одиночных МДМ-структур, рассматриваемые как функции от  $k_x$ , имеют вид

$$R_i(k_x) = c_{i,1}(k_x - k_{x,0}) + O[(k_x - k_{x,0})^2], i = 1, 2. \quad (10)$$

В работе [9] с использованием формализма матрицы рассеяния показано, что в двойной МДМ-структуре можно получить нуль отражения 2-го порядка по  $k_x$  при  $k_x = k_{x,0}$ . При этом коэффициент отражения двойной МДМ-структуры принимает вид

$$R_{dbl}(k_x) = c_2(k_x - k_{x,0})^2 + O[(k_x - k_{x,0})^3]. \quad (11)$$

Выражение (11) описывает коэффициент отражения двойной МДМ-структуры в геометрии плоского падения (при  $k_y = 0$ ). В общем случае  $k_y \neq 0$  коэффициент отражения  $R_{dbl}(k_x, k_y)$  можно представить виде [15]:

$$R_{dbl}(k_x, k_y) = c_2(k_x - k_{x,0})^2 + c_4 k_y^4 + O[(k_x - k_{x,0})^3 + k_y^6]. \quad (12)$$

Как отмечено выше, двойная МДМ-структура рассчитывается для конкретной поляризации. При этом для «кросс-поляризованной» падающей волны (например, ТЕ-поляризованной в случае МДМ-структуры, рассчитанной для ТМ-поляризации) коэффициент отражения не обращается в нуль при  $\mathbf{k}_{\perp,inc} = (k_{x,0}, 0)$  и имеет вид [15]

$$R_{dbl}^{cr}(k_x, k_y) = R_{dbl}^{cr}(k_{x,0}, 0) + c_1^{cr}(k_x - k_{x,0}) + c_2^{cr} k_y^2 + O[(k_x - k_{x,0})^2 + k_y^4] \quad (13)$$

### 3. Передаточная функция двойной МДМ-структуры

ПФ, описывающая преобразование  $x$ -компоненты электрического поля падающего трехмерного пучка при отражении от слоистой структуры, имеет вид (9). Предположим, что в качестве слоистой структуры используется двойная МДМ-структура, имеющая нуль второго порядка при  $k_x = k_{x,0} = k_0 \sqrt{\epsilon_{sup}} \sin \theta$  для ТМ-поляризации. В этом случае коэффициенты отражения  $R_{TM}(\mathbf{k}_{\perp})$ ,  $R_{TE}(\mathbf{k}_{\perp})$  в (9) будут иметь вид (12) и (13) соответственно. Раскладывая ПФ (9) в ряд Тейлора до квадратичных членов в окрестности точки  $\mathbf{k}_{\perp,inc} = (0,0)$  и учитывая вид коэффициентов отражения (12), (13) для двойной МДМ-структуры, получим

$$H(\mathbf{k}_{\perp,inc}) \approx c_{x,2} k_{x,inc}^2 + c_{y,2} k_{y,inc}^2 \quad (14)$$

где

$$c_{x,2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial k_{x,inc}^2} \left[ R_{TM}(\mathbf{k}_{\perp}(\mathbf{k}_{\perp,inc})) \right] \Big|_{\mathbf{k}_{\perp,inc}=(0,0)}, c_{y,2} = \frac{2R_{TE}(k_{x,0},0)}{tg^2 \theta k_0^2 \epsilon_{sup}} \quad (15)$$

Таким образом, в окрестности точки  $\mathbf{k}_{\perp,inc} = (0,0)$  ПФ содержит только квадратичные члены. В этом случае, как легко видеть из формулы (8), ПФ (14) реализует следующую операцию дифференцирования второго порядка поперечного профиля  $x$ -компоненты электрического поля падающего пучка:

$$E_{refl,x}(x_{inc}, y_{inc}, 0) = -c_{x,2} \frac{\partial^2 E_{inc,x}(x_{inc}, y_{inc}, 0)}{\partial x_{inc}^2} - c_{y,2} \frac{\partial^2 E_{inc,x}(x_{inc}, y_{inc}, 0)}{\partial y_{inc}^2} \quad (16)$$

В работе [9] показано, что двойная МДМ-структура в случае двумерного падающего пучка осуществляет вычисление второй производной выбранной компоненты электромагнитного

поля по пространственной переменной  $x_{inc}$ . Для случая трехмерного пучка, как показывает формула (16), это не так. Из-за того, что для кросс-поляризованной падающей волны коэффициент отражения (в рассматриваемом случае —  $R_{TE}(\mathbf{k}_\perp)$ ) в общем случае не обращается в нуль при  $\mathbf{k}_\perp = (k_{x,0}, 0)$ , в отраженном пучке дополнительно появляется вторая производная по переменной  $y_{inc}$ . Ненулевое значение коэффициента отражения  $R_{TE}(k_{x,0}, 0)$  дает возможность использовать двойную МДМ-структуру для оптического вычисления оператора Лапласа. Данный оператор (с точностью до постоянного множителя) будет вычисляться при  $c_{x,2} = c_{y,2}$  в (14).

#### 4. Расчет двойной МДМ-структуры для вычисления оператора Лапласа

Исследуем возможность вычисления оператора Лапласа с помощью двойной МДМ-структуры. Согласно (14)–(16), для этого необходимо выполнение условия  $c_{x,2} = c_{y,2}$ . Для исследования были выбраны двойные МДМ-структуры типа “Au–SiO<sub>2</sub>–Ag–SiO<sub>2</sub>–Ag–TiO<sub>2</sub>–Au”. В качестве материалов слоев в таких структурах используются золото (Au), диоксид кремния (SiO<sub>2</sub>), серебро (Ag) и диоксид титана (TiO<sub>2</sub>) в указанном выше порядке. В качестве материалов над и под структурой будем использовать воздух и диоксид кремния. Отметим также, что для каждого фиксированного угла падения пучка  $\theta$  существует целый класс двойных МДМ-структур, имеющих нуль отражения 2-го порядка. Структуры данного класса параметризованы толщиной нижнего металлического слоя [9]. Это означает, что для различных толщин нижнего слоя получаются различные двойные МДМ-структуры с нулями отражения 2-го порядка. Таким образом, можно попытаться выполнить условие  $c_{x,2} = c_{y,2}$  за счет выбора параметров  $\theta$  и  $h_m$ .

Для исследования возможности выполнения условия  $c_{x,2} = c_{y,2}$  двойные МДМ-структуры рассчитывались при различных значениях ( $\theta, h_m$ ) из условия получения нуля второго порядка для ТМ-поляризации при длине волны  $\lambda = 630$  нм. Для расчета коэффициентов отражения, входящих в ПФ (9), использовался численно устойчивый метод [16]. В результате расчетов была найдена двойная МДМ-структура, для которой при параметрах  $\theta = 36^\circ$ ,  $h_m = 105$  нм условие  $c_{x,2} = c_{y,2}$  выполняется с высокой точностью. Для данной структуры  $c_{x,2} = 0,057 \times e^{0,940i}$  мкм<sup>2</sup>,  $c_{y,2} = 0,056 \times e^{0,940i}$  мкм<sup>2</sup>, так что относительная ошибка  $|c_{x,2} - c_{y,2}| / |c_{x,2}|$  выполнения условия  $c_{x,2} = c_{y,2}$  составляет всего 0,017. Толщины слоев (начиная с верхнего) рассчитанной структуры равны

$$h_{MDM,2} = (10,0; 132,3; 8,6; 52,2; 33,6; 74,4; 105,0) \text{ нм.} \quad (17)$$

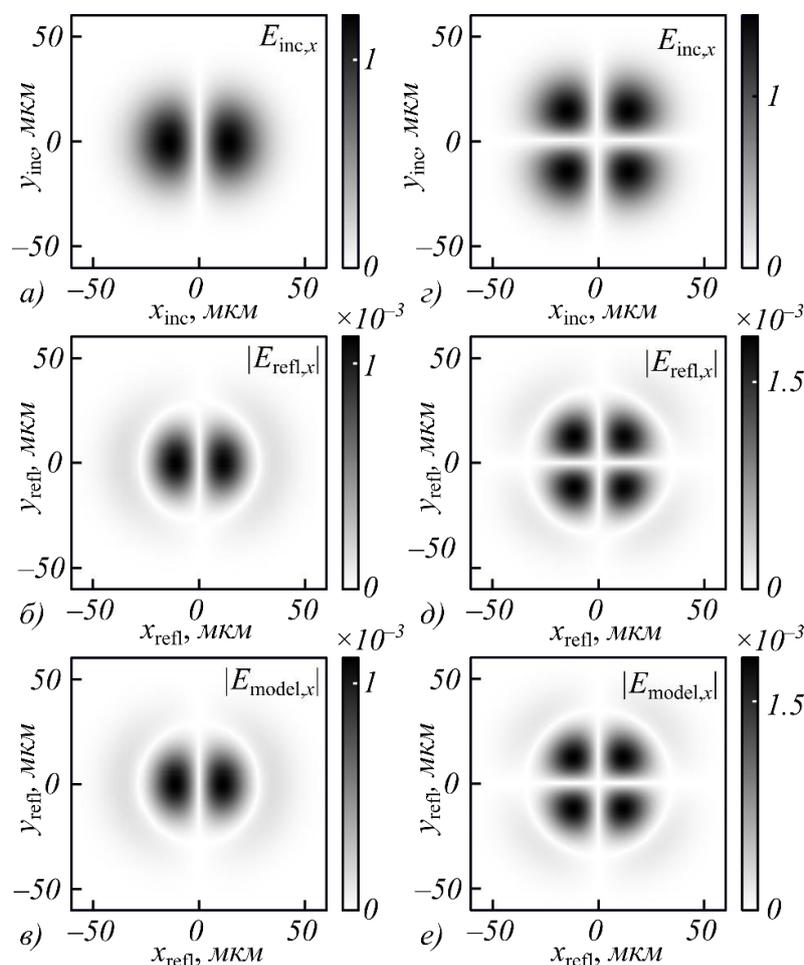
Исследуем применение двойной МДМ-структуры (17) для вычисления оператора Лапласа на примере падающих линейно поляризованных пучков с поперечными профилями  $x$ -компонент электрического поля, соответствующими модам Эрмита–Гаусса:

$$E_{inc,x}(x_{inc}, y_{inc}, 0) = U_{m,n}(x_{inc}, y_{inc}) = H_m \left( \sqrt{2} \frac{x_{inc}}{\sigma} \right) H_n \left( \sqrt{2} \frac{y_{inc}}{\sigma} \right) \exp \left( -\frac{x_{inc}^2 + y_{inc}^2}{\sigma^2} \right) \quad (18)$$

где  $H_m(x)$  — многочлен Эрмита. Будем считать, что  $x$ -компоненты электрических полей падающих пучков соответствуют модам Эрмита–Гаусса  $U_{1,0}(x_{\text{inc}}, y_{\text{inc}})$  и  $U_{1,1}(x_{\text{inc}}, y_{\text{inc}})$  при  $\sigma = 20$  мкм. На рис. 3 показаны  $x$ -компоненты электрического поля падающих пучков, модули численно рассчитанных по формуле (8)  $x$ -компонент электрического поля отраженных пучков, а также модельные функции

$$E_{\text{model},x}(x_{\text{refl}}, y_{\text{refl}}) = -c_{x,2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_{\text{refl}}^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_{\text{refl}}^2} \right] U_{m,n}(x_{\text{refl}}, y_{\text{refl}}), \quad (19)$$

где  $(m, n) = (1, 0)$  и  $(m, n) = (1, 1)$ . В данном случае модельные функции являются результатом применения оператора Лапласа с множителем  $-c_{x,2}$  к функциям  $U_{1,0}(x_{\text{refl}}, y_{\text{refl}})$ ,  $U_{1,1}(x_{\text{refl}}, y_{\text{refl}})$ , что соответствует преобразованию (16) при  $c_{x,2} = c_{y,2}$ .



**Рис. 3.** Профили  $x$ -компонент электрического поля падающего, отраженного и модельного пучков для моды  $U_{1,0}$  (а-в) и моды  $U_{1,1}$  (г-е)

Рисунок 3 показывает высокое качество вычисления оператора Лапласа. Действительно, численно рассчитанные  $x$ -компоненты электрического поля отраженных пучков (рис. 3б,д) визуально очень похожи на модельные функции (рис. 3в,е). Нормированное среднеквадратическое отклонение численно рассчитанных компонент  $E_{\text{refl},x}$  от модельных функций  $E_{\text{model},x}$  составляет всего 0,62% для моды Эрмита–Гаусса  $U_{1,0}(x_{\text{inc}}, y_{\text{inc}})$  и 0,99% для моды Эрмита–Гаусса  $U_{1,1}(x_{\text{inc}}, y_{\text{inc}})$ .

## Заключение

Рассмотрено представление трехмерного линейно-поляризованного светового пучка, наклонно падающего на слоистую структуру, в базисе ТЕ- и ТМ-поляризованных плоских волн. Получена ПФ, описывающая преобразование основной поперечной компоненты электрического поля падающего пучка, происходящее при отражении пучка от слоистой структуры. Показано, что при наклонном падении линейно поляризованного пучка на слоистую структуру, состоящую из двух трехслойных структур «металл-диэлектрик-металл» и имеющую ноль второго порядка по пространственной частоте, возможно оптическое выполнение операции пространственного дифференцирования второго порядка. Частным случаем данной операции является операция вычисления оператора Лапласа. Рассчитана слоистая металлодиэлектрическая структура для оптического вычисления оператора Лапласа при отражении в геометрии наклонного падения. В рамках численного моделирования на примере мод Эрмита–Гаусса показано, что указанная операции может быть реализована с высоким качеством (при нормированной среднеквадратичной ошибке менее 1%).

## Благодарность

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 19-19-00514).

## Список источников

- [1] **Silva, A.** Performing Mathematical Operations with Metamaterials / A. Silva, F. Monticone, G. Castaldi, V. Galdi, A. Alù, N. Engheta // *Science*. — 2014. — Vol. 343. — № 6167. — P. 160–163. — DOI: 10.1126/science.1242818.
- [2] **Zhou, Y.** Flat optics for image differentiation / Y. Zhou, H. Zheng, I. I. Kravchenko, J. Valentine // *Nature Photonics*. — 2020. — Vol. 14. — P. 316–323. — DOI: 10.1038/s41566-020-0591-3.
- [3] **Bykov, D. A.** Temporal differentiation of optical signals using resonant gratings / D. A. Bykov, L. L. Doskolovich, V. A. Soifer // *Optics Letters*. — 2011. — Vol. 36. — № 17. — P. 3509–3511. — DOI: 10.1364/OL.36.003509.
- [4] **Dong, Z.** Optical spatial differentiator based on subwavelength high-contrast gratings / Z. Dong, J. Si, X. Yu, X. Deng // *Applied Physics Letters*. — 2018. — Vol. 112. — № 18. — P. 181102. — DOI: 10.1063/1.5026309.
- [5] **Bykov, D. A.** First-order optical spatial differentiator based on a guided-mode resonant grating / D. A. Bykov, L. L. Doskolovich, A. A. Morozov, V. V. Podlipnov, E. A. Bezus, P. Verma, V. A. Soifer // *Optics Express*. — 2018. — Vol. 26. — № 8. — P. 10997–11006. — DOI: 10.1364/OE.26.010997.
- [6] **Huang, J.** Spatiotemporal Differentiators Generating Optical Vortices with Transverse Orbital Angular Momentum and Detecting Sharp Change of Pulse Envelope / J. Huang, J. Zhang, T. Zhu, Z. Ruan // *Laser & Photonics Review*. — 2022. — Vol. 16. — № 5. — P. 2100357. — DOI: 10.1002/lpor.202100357.
- [7] **Doskolovich, L. L.** Spatial differentiation of optical beams using phase-shifted Bragg grating / L. L. Doskolovich, D. A. Bykov, E. A. Bezus, V. A. Soifer // *Optics Letters*. — 2014. — Vol. 39. — № 5. — P. 1278–1281. — DOI: 10.1364/OL.39.001278.
- [8] **Kashapov, A. I.** Spatial differentiation of optical beams using a resonant metal-dielectric-metal structure / A. I. Kashapov, L. L. Doskolovich, E. A. Bezus, D. A. Bykov, V. A. Soifer // *Journal of Optics*. — 2021. — Vol. 23. — № 2. — P. 023501. — DOI: 10.1088/2040-8986/abe63b.

- [9] **Doskolovich, L. L.** Optical properties of cascaded metal-dielectric-metal structures and their application to the differentiation of optical signals / L. L. Doskolovich, A. I. Kashapov, E. A. Bezus, D. A. Bykov // *Photonics and Nanostructures – Fundamentals and Applications*. — 2022. — Vol. 52. — P. 101069. — DOI: 10.1016/j.photonics.2022.101069.
- [10] **Zhu, T.** Plasmonic computing of spatial differentiation / T. Zhu, Y. Zhou, Y. Lou, H. Ye, M. Qiu, Z. Ruan, S. Fan // *Nature Communications*. — 2017. — Vol. 8. — P. 15391. — DOI: 10.1038/ncomms15391.
- [11] **Bykov, D. A.** Optical computation of the Laplace operator using phase-shifted Bragg grating / D. A. Bykov, L. L. Doskolovich, E. A. Bezus, V. A. Soifer // *Optics Express*. — 2014. — Vol. 22. — № 21. — P. 25084–25092. — DOI: 10.1364/OE.22.025084.
- [12] **Wesemann, L.** Selective near-perfect absorbing mirror as a spatial frequency filter for optical image processing / L. Wesemann, E. Panchenko, K. Singh, E. D. Gaspera, D. E. Gómez, T. J. Davis, A. Roberts // *APL Photonics*. — 2019. — Vol. 4. — № 10. — P. 100801. — DOI: 10.1063/1.5113650.
- [13] **Guo, C.** Photonic crystal slab Laplace operator for image differentiation / C. Guo, M. Xiao, M. Minkov, Y. Shi, S. Fan // *Optica*. — 2018. — Vol. 5. — № 3. — P. 251–256. — DOI: 10.1364/OPTICA.5.000251.
- [14] **Pan, D.** Laplace metasurfaces for optical analog computing based on quasi-bound states in the continuum / D. Pan, L. Wan, M. Ouyang, W. Zhang, A. A. Potapov, W. Liu, Z. Liang, T. Feng, Z. Li // *Photonics Research*. — 2021. — Vol. 9. — № 9. — P. 1758–1766. — DOI: 10.1364/PRJ.426827.
- [15] **Doskolovich, L. L.** Optical computation of the Laplace operator at oblique incidence using a multilayer metal-dielectric structure / L. L. Doskolovich, A. I. Kashapov, E. A. Bezus, N. V. Golovastikov, D. A. Bykov // *Optics Express*. — 2023. — Vol. 31. — № 10. — P. 17050–17064.
- [16] **Moharam, M. G.** Stable implementation of the rigorous coupled-wave analysis for surface-relief gratings: enhanced transmittance matrix approach / M. G. Moharam, D. A. Pommet, E. B. Grann, T. K. Gaylord // *Journal of the Optical Society of America A*. — 1995. — Vol. 12. — № 5. — P. 1077–1086. — DOI: 10.1364/JOSAA.12.001077.

## Second-order optical differentiation of a 3D light beam using a multilayer metal-dielectric structure

*L. L. Doskolovich*<sup>1,2</sup>, *A. I. Kashapov*<sup>1,2</sup>, *E. A. Bezus*<sup>1,2</sup>, *N. V. Golovastikov*<sup>1,2</sup>, *D. A. Bykov*<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> IPSI RAS – Branch of the FSRC «Crystallography and Photonics» RAS, Samara, Russia

<sup>2</sup> Samara National Research University, Samara, Russia

We investigate the optical implementation of a second-order differentiation operation using a metal-dielectric layered structure in the oblique incidence geometry. It is shown that the transformation of the profile of a three-dimensional light beam occurring upon its reflection from a layered structure can be described using the theory of linear systems. The transfer function of the corresponding linear system is obtained, and it is shown that if a layered structure has a reflection zero of the second order with respect to the spatial frequency for one of the polarizations, the transformation performed by the structure corresponds to the weighted sum of the second derivatives of the incident beam profile with respect to the spatial coordinates. Using the presented theoretical description, layered metal-dielectric structure for computing the Laplace operator of the profile of a three-dimensional linearly polarized light beam is calculated. The presented numerical simulation results demonstrate high-quality computation of this operator.

*Keywords:* Optical differentiation, Second derivative, Laplace operator, Layered structure, Transfer function.